

ANÁLISIS DE SISTEMAS NO SUAVES UTILIZANDO EL MÉTODO SPT

ANA CATALINA RUIZ ARENAS

Tesis para obtener el título de
MAGÍSTER EN INGENIERÍA

Asesor
Iván Darío Arango López

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
MEDELLÍN
2013

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	6
1 INTRODUCCIÓN	8
1.1 Justificación	8
1.2 Objetivo.....	9
2 MARCO REFERENCIAL	11
2.1 Sistemas dinámicos no suaves.....	11
2.1.1 Clasificación de sistemas no suaves.....	11
2.2 Sistemas de Filippov	12
2.3 EL método SPT	13
2.3.1 Clasificación de los puntos sobre el límite de discontinuidad	13
2.3.2 Detección de bifurcaciones locales.....	15
2.3.3 Detección de bifurcaciones globales.....	16
2.3.4 Proceso de integración	17
3 CARACTERIZACIÓN DE PUNTOS EN LAS REGIONES SUAVES	18
3.1 Caracterización de puntos de equilibrio y puntos regulares sobre las regiones suaves	18
3.2 Caracterización de puntos de equilibrio en las regiones suaves para sistemas lineales	19
3.2.1 Nodo estable	19
3.2.2 Nodo inestable	20
3.2.3 Punto Silla	21
3.2.4 Centro:	22
3.2.5 Foco estable:	23
3.2.6 Foco inestable:	24
3.3 Caracterización de puntos en las regiones suaves para sistemas no lineales	25
3.4 Caracterización de los puntos regulares sobre las regiones suaves	26
3.4.1 Punto girando en la dirección de las manecillas del reloj:.....	26
3.4.2 Punto girando en dirección contraria a las manecillas del reloj:	28
4 PLANTEAMIENTO DE SISTEMAS NO SUAVES	30
3.1 Sistemas mecánicos	30

4.1.1	Sistemas sin deslizamiento	30
4.1.2	Sistemas con deslizamiento	36
4.1.3	Sistemas con impacto	37
4.2	Sistemas electrónicos	39
4.2.1	Convertidor Buck.....	39
4.2.2	Convertidor Boost	41
4.3	Sistemas ecológicos	42
4.3.1	Dinámica de la explotación de una población	42
4.3.2	Modelo depredador-presa con una presa alternativa.....	43
4.3.3	Modelo depredador-presa con un hábitat alternativo para la presa	44
4.3.4	Modelo depredador-presa con restricciones de caza para el depredador	45
4.4	Sistema químico	46
4.4.1	Contenedor líquido-gas.....	46
4.5	Sistemas sociales	47
4.5.1	Democracias de dos partidos.....	48
5	ANÁLISIS DEL SISTEMA DE PREDADOR PRESA	50
6	OSCILADOR ROTATIVO	61
6.1	Bifurcaciones sobre los límites de discontinuidad $\Sigma_{4,5}$ y $\Sigma_{2,4}$	67
7	OSCILADOR DE FRICCIÓN DE DOBLE BANDA.....	70
8	MESA MOVIDA POR LEVA	81
9	CONCLUSIONES.....	88
	BIBLIOGRAFÍA.....	90

LISTA DE TABLAS

Tabla 6.1. Valores de A en los que se presentan bifurcaciones en cada límite de discontinuidad	68
Tabla 6.2. Secuencias de los ciclos para los valores críticos de A en el límite de discontinuidad $\Sigma_{4,5}$	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Símbolos y nombres de los puntos sobre el límite de discontinuidad ..	15
Figura 3.1. Sistema con nodo estable.....	20
Figura 3.2. Sistema con nodo inestable.....	21
Figura 3.3. Sistema con punto silla	22
Figura 3.4. Sistema con centro	23
Figura 3.5. Sistema con foco estable.....	24
Figura 3.6. Sistema con foco inestable	25
Figura 3.7. Campos vectoriales sobre una órbita girando en la dirección de las manecillas del reloj.	27
Figura 3.8. Esquema de los vectores f , S y V	28
Figura 3.9. Campos vectoriales sobre una órbita girando en dirección contraria a las manecillas del reloj.	29
Figura 3.10. Símbolos para los tipos de puntos sobre las zonas suaves.....	29
Figura 4.1. Sistema mecánico con resorte-amortiguador y fuerza gravitacional....	31
Figura 4.2. Sistema mecánico con restricción resorte-amortiguador longitudinal ..	32
Figura 4.3. Sistema con restricción resorte tipo juego mecánico.....	33
Figura 4.4. Sistema con restricción resorte tipo juego mecánico con fuerza gravitacional.....	35
Figura 4.5. Masa sobre una banda transportadora con fricción seca	36
Figura 4.6. Oscilador de impacto	38
Figura 4.7. Estructura de un convertidor Buck.....	40
Figura 4.8. Estructura de un convertidor Boost.....	41
Figura 4.9. Contenedor líquido gas.....	46
Figura 5.1. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 2.75$	51
Figura 5.2. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 2.44$	52
Figura 5.3. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.625$	53
Figura 5.4. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.2437$	53
Figura 5.5. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.2375$	54
Figura 5.6. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.2277$	55
Figura 5.7. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.175$	55
Figura 5.8. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.03$	56
Figura 5.9. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.02$	56
Figura 5.10. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.01017$	57
Figura 5.11. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 0.9$	58

Figura 5.12. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 0.6527$.	58
Figura 5.13. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 0.5$.	59
Figura 5.14. Diagrama de bifurcación para el sistema depredador-presa	60
Figura 6.1. Oscilador rotativo	61
Figura 6.2. Distribución de los campos vectoriales de acuerdo a los valores de x_2 en que $vr_1 = 0$.	65
Figura 6.3. Distribución de los campos vectoriales de acuerdo a los valores de los parámetros	65
Figura 6.4. Distribución de campos vectoriales con $A = 0.3$	66
Figura 6.5. Colores asociados con las dinámicas en los límites de discontinuidad	67
Figura 6.6. Diagrama de bifurcaciones para (a) $\omega = 1.5708$ ($vr_1 = 0$) y (b) $\omega = -2.1991$ ($vr_2 = 0$).	67
Figura 6.7. Bifurcaciones en $\Sigma_{4,5}$ y $\Sigma_{2,4}$. (a) Bifurcación grazing en $A = -0.299$, (b) Bifurcación switching en $A = -0.15$, (c) Bifurcación crossing en $A = 0.62$, (d) Bifurcación grazing en $A = 0$, (e) Bifurcación switching en $A = 0.35$, (f) Bifurcación crossing en $A = 1.63$.	69
Figura 7.1. Oscilador de fricción de doble banda	70
Figura 7.2. (a) Campos vectoriales para $A = 1.0$	73
Figura 7.3. Retrato de fase para $A = 2.195$	75
Figura 7.4. Retrato de fase para $A = 2.5$	76
Figura 7.5. Retrato de fase para $A = 5.5$	77
Figura 7.6. Retrato de fase para $A = 5.71$	78
Figura 7.7. Retrato de fase para $A = 5.815$	79
Figura 7.8. Retrato de fase para $A = 5.945$	80
Figura 8.1. Bloque sobre una mesa movida por una leva	81
Figura 8.2. Perfil de la leva	84
Figura 8.3. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 50$, $e = 0.10$, $x_0 = 0.05$	84
Figura 8.4. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 100$, $e = 0.10$, $x_0 = 0.05$	85
Figura 8.5. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 50$, $e = 0.24$, $x_0 = 0.05$	86
Figura 8.6. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 20$, $e = 0.24$, $x_0 = 0.05$	86
Figura 8.7. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 80$, $e = 0.24$, $x_0 = 0.05$	87

RESUMEN

Esta tesis presenta el análisis de varios sistemas no suaves o discontinuos de diferentes campos de la ciencia y la ingeniería utilizando el método SPT (Singular Point Tracking) basado en la identificación y seguimiento de algunos puntos con características especiales sobre los conjuntos de discontinuidad. El método SPT ha permitido solucionar algunas de las dificultades para modelar sistemas no suaves, como la imprecisión en la detección de eventos y brinda la posibilidad de ampliar la comprensión de muchos de estos sistemas que muestran dinámicas muy complejas.

El documento comienza con una pequeña introducción a los sistemas no suaves y su clasificación, además de describir brevemente el funcionamiento del método SPT y los procedimientos que utiliza para la detección de bifurcaciones locales y globales.

El método SPT es ampliado mediante la caracterización de los puntos sobre las regiones suaves, proponiendo nuevas funciones booleanas que permiten identificar los tipos de puntos de equilibrio y la dirección de giro de los puntos regulares. Esta ampliación lleva a la extensión de la clasificación de 45 puntos a 53 y permite un análisis integral de los sistemas no suaves.

El capítulo 4 presenta una síntesis de sistemas mecánicos, eléctricos, ecológicos, químicos y sociales que han sido estudiados anteriormente por otros investigadores y que pueden ser modelados como sistemas no suaves o discontinuos, junto con sus representaciones matemáticas.

En el capítulo 5 el sistema depredador presa propuesto en [1] es ampliado para ilustrar el método SPT en la detección de bifurcaciones locales y globales de sistemas no suaves. Se muestran los cambios en las secuencias de segmentos regulares y puntos especiales en el límite de discontinuidad para bifurcaciones locales y en las secuencias de segmentos y puntos aislados en las regiones suaves y en los límites de discontinuidad pertenecientes a órbitas periódicas para bifurcaciones globales.

Un oscilador rotativo con múltiples límites de discontinuidad debido a la forma de las levas y el contacto friccional es utilizado para ilustrar el procedimiento de detección de bifurcaciones globales en sistemas complejos con dinámicas deslizantes.

En el capítulo 7, el método SPT es utilizado para detectar bifurcaciones globales de ciclos compuestos por hasta cuatro segmentos deslizantes en un oscilador de doble banda.

Finalmente, el método SPT es utilizado para analizar las dinámicas de un sistema compuesto por un bloque sobre una banda transportadora que posee varios tipos de discontinuidades: impacto, fricción y restricción del tipo resorte-amortiguador.

Este trabajo permite entender de una manera precisa la gran complejidad dinámica de sistemas relativamente simples, los cuales presentan gran variedad de campos vectoriales y límites de discontinuidad.

Palabras clave: Sistemas no suaves, sistemas Filippov, bifurcaciones deslizantes

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación

Muchos sistemas de la ciencia y la ingeniería deben ser modelados como sistemas dinámicos discontinuos o sistemas no suaves. Los fenómenos más conocidos que llevan a la presencia de discontinuidades son la fricción y el impacto en sistemas mecánicos. Sin embargo, las discontinuidades están presentes en sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, ecológicos, sociales y económicos.

Los sistemas no suaves han sido clasificados en tres clases de acuerdo al tipo de discontinuidad [2]. La primera clase, o sistemas con Jacobiano discontinuo, incluye los sistemas que poseen campo vectorial continuo pero con alguna de sus derivadas discontinua. La segunda clase los sistemas con campo vectorial discontinuo, llamados sistemas de Filippov. Y la tercera clase, los sistemas que presentan discontinuidades en las variables de estado, o discontinuidades de salto.

En cualquiera de estos sistemas el espacio de estados está dividido en un número finito de regiones de dimensión n , cada una de las cuales es modelada por un conjunto diferente de ecuaciones diferenciales suaves y está separada de las demás regiones por una superficie de dimensión $n - 1$ en la cual se presenta una discontinuidad, esta superficie es llamada límite de discontinuidad.

La interacción de los campos vectoriales suaves con el límite de discontinuidad da origen a gran cantidad de dinámicas complejas, generando, además, bajo variación de parámetros, cambios estructurales, como por ejemplo pérdida súbita de estabilidad, no presentados en sistemas suaves. Tales cambios corresponden a bifurcaciones a las cuales se les ha dado el nombre de *Bifurcaciones inducidas por discontinuidad* y fueron estudiadas ampliamente en [3], [4].

Un tipo particular de bifurcaciones inducidas por discontinuidad ocurre en los sistemas suaves por tramos con campo vectorial discontinuo o sistemas de Filippov. Los sistemas de Filippov muestran una dinámica única en la cual, el movimiento sobre el espacio fase queda restringido al límite de discontinuidad cuando los campos vectoriales a cada lado de este tienen direcciones opuestas, tal fenómeno se conoce como movimiento deslizante. La aparición o desaparición de deslizamiento al variar un parámetro, da lugar a la creación de nuevas dinámicas, transformando topológicamente el sistema. A esta nueva bifurcación inducida por discontinuidad se le llama *bifurcación deslizante*.

Esta complejidad de dinámicas hace vital el estudio de los sistemas dinámicos no suaves en todos los campos de la ciencia y la ingeniería para ampliar su conocimiento, solucionar problemas, evitar comportamientos indeseados, lograr diseños seguros, eficientes y de bajo costo o alcanzar un comportamiento específico.

Pero además, la complejidad de estos sistemas también lleva a dificultades matemáticas y numéricas para su simulación y análisis. En las últimas décadas se han hecho gran cantidad de avances en métodos y herramientas que han permitido la modelación de tales sistemas.

Dos de las dificultades en la modelación de sistemas no suaves son: (1) la imposibilidad para detectar con exactitud eventos no suaves, como el cambio de una región a otra, el cambio de movimiento libre a movimiento deslizante, entre otros, lo que traía como consecuencia errores entre la trayectoria modelada y la real, la no detección de movimientos deslizantes y por lo tanto, de bifurcaciones y (2) la falta de herramientas adaptadas al manejo de las tres clases de discontinuidades.

Sin embargo, el método SPT ha ayudado en gran parte a solucionar estas dificultades mediante el seguimiento e identificación de puntos sobre el límite de discontinuidad que tienen características especiales, análisis que permiten la detección de los puntos en el límite de discontinuidad en los cuales la trayectoria del sistema cambia de una región suave a otra, o de movimiento deslizante a movimiento no restringido y la inclusión de métodos para el manejo de todas las discontinuidades.

Por todo lo anterior, la simulación de sistemas no suaves mecánicos, eléctricos, ecológicos e hidráulicos utilizando el método SPT permite un conocimiento más profundo y preciso de las complejas dinámicas que los caracterizan, de gran importancia para su buen comportamiento y que puede añadir nuevo conocimiento a la teoría de los sistemas no suaves.

1.2 Objetivo

El objetivo principal de esta tesis es analizar un grupo de varios sistemas no suaves o discontinuos de varias ramas de la ciencia y la ingeniería utilizando el método SPT. Particularmente, se plantea el estudio de un sistema ecológico y varios sistemas mecánicos.

Para lograr el cumplimiento de este objetivo son necesarios los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar las características de los puntos sobre las regiones suaves de un sistema discontinuo para encontrar diferencias que permitan identificar entre las distintas clases de puntos.
- Definir funciones booleanas que permitan detectar cada clase diferente de puntos en las regiones suaves.
- Presentar sistemas en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería que puedan ser modelados como sistemas no suaves.
- Plantear los grupos de ecuaciones y conjuntos de discontinuidad que definen la dinámica de cada uno de los sistemas a estudiar.
- Utilizar el método SPT para simular cada sistema.
- Analizar las dinámicas y las bifurcaciones presentes en cada sistema.

2 MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presenta una pequeña introducción a los sistemas no suaves y su clasificación, las dinámicas particulares presentes en los sistemas de Filippov y el método convexo de Filippov para definir el movimiento deslizante. Además se describe brevemente el funcionamiento del método SPT, sus procedimientos para la detección de bifurcaciones locales y globales y la localización precisa de eventos.

2.1 Sistemas dinámicos no suaves

Los sistemas dinámicos no suaves son sistemas en los cuales el espacio de estados está dividido en un número finito de regiones Z_i , $i = 1, 2, \dots, m$, de dimensión n , cada una de las cuales es modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias con campos vectoriales $f_i(x)$ suaves como en la ecuación (2.1).

$$\dot{x} = f_i(x) \quad (2.1)$$

Estas regiones suaves están separadas por superficies de dimensión $n - 1$ en las que se presenta algún tipo de discontinuidad y las cuales son llamadas *límites de discontinuidad* (LD).

2.1.1 Clasificación de sistemas no suaves

Los sistemas no suaves fueron clasificados por [2] de acuerdo al tipo de discontinuidad de la siguiente manera:

Sistemas con Jacobiano discontinuo: son sistemas cuyo campo vectorial es continuo pero no diferenciable. Entre estos se encuentran los sistemas mecánicos con restricciones compuestas por resortes elásticos.

Sistemas de Filippov: son sistemas que poseen campo vectorial discontinuo, como los sistemas mecánicos con restricciones compuestas por resorte y amortiguador o los sistemas con fricción seca.

Sistemas con discontinuidad de salto: son sistemas que tienen discontinuidad en las variables de estado. Ejemplos de estos son los sistemas que modelan el impacto entre dos cuerpos.

2.2 Sistemas de Filippov

Se considerará un sistema de Filippov plano, cuyo espacio de estados está dividido en dos regiones Z_1 y Z_2 y representado por las ecuaciones diferenciales (2.2), donde f_1 y f_2 son funciones suaves.

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & x \in Z_1 \\ f_2(x), & x \in Z_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Las regiones están separadas por un límite de discontinuidad $\Sigma_{1,2}$ representado mediante la función escalar $H(x)$, como en la ecuación (2.3).

$$\Sigma_{1,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = 0\} \quad (2.3)$$

De modo que las regiones Z_1 y Z_2 se pueden definir como en las ecuaciones (2.4) y (2.5).

$$Z_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) < 0\} \quad (2.4)$$

$$Z_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) > 0\} \quad (2.5)$$

Puesto que el campo vectorial de un sistema de Filippov es discontinuo, a un mismo punto $x \in \Sigma_{1,2}$ le corresponden dos campos vectoriales $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que generalmente son diferentes.

Cuando los campos vectoriales apuntan en la misma dirección, es decir cuando las componentes normales de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con respecto a $H(x)$ tienen el mismo signo, la solución del sistema cruza el límite de discontinuidad.

Por el contrario, cuando los campos vectoriales apuntan en direcciones contrarias, es decir, las componentes normales de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con respecto a $H(x)$ tienen signos opuestos, el movimiento queda restringido al límite de discontinuidad. A este fenómeno se le llama *movimiento deslizante* o *deslizamiento*. Los segmentos deslizantes son *atractivos* si los vectores $f_1(x)$ y $f_2(x)$ apuntan hacia el límite de discontinuidad y *repulsivos* si apuntan hacia afuera del límite de discontinuidad.

El *conjunto deslizante* Σ_s se define como la unión de segmentos deslizantes y puntos deslizantes aislados y se representa mediante las ecuaciones (2.6) y (2.7), donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar estándar.

$$\Sigma_s = \{x \in \Sigma_{1,2} : \sigma(x) \leq 0\} \quad (2.6)$$

$$\sigma(x) = \langle H_x(x), f_1(x) \rangle \langle H_x(x), f_2(x) \rangle \quad (2.7)$$

El movimiento deslizante se puede definir para cualquier punto $x \in \Sigma_s$ tal que $\langle H_x(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle \neq 0$, mediante el campo vectorial $g(x)$ propuesto en [5] como una combinación convexa de los vectores $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tangente a $\Sigma_{1,2}$ (ecuaciones (2.8) y (2.9)).

$$g(x) = \lambda f_1(x) + (1 - \lambda) f_2(x) \quad (2.8)$$

$$\lambda = \frac{\langle H_x(x), f_2(x) \rangle}{\langle H_x(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle} \quad (2.9)$$

La aparición o desaparición de deslizamiento al variar un parámetro, da lugar a la creación de nuevas dinámicas, transformando topológicamente el sistema. A este tipo de bifurcaciones se les llama *bifurcaciones deslizantes*.

2.3 EL método SPT

El método SPT propuesto en [6] se basa en la identificación de secuencias de puntos sobre los límites de discontinuidad y su relación con dinámicas específicas en sistemas de Filippov para la detección de bifurcaciones. Para esto, el método realiza una clasificación de los puntos sobre el límite de discontinuidad Σ_{ij} entre dos regiones Z_i y Z_j y le asigna a cada tipo de punto una función booleana que permite identificarlo.

2.3.1 Clasificación de los puntos sobre el límite de discontinuidad

Los puntos sobre el límite de discontinuidad se clasifican en dos grupos: puntos de cruce y puntos deslizantes.

2.3.1.1 Puntos de cruce

Son los puntos en los cuales, la órbita cruza de una región suave a otra. Se diferencian según la dirección de cruce, de i a j ó de j a i . (Figura 2.1a).

2.3.1.2 Puntos deslizantes

Son los puntos del *conjunto deslizante* Σ_s y se dividen en regulares y especiales.

2.3.1.2.1 Puntos deslizantes regulares

Son aquellos en los cuales se presenta movimiento deslizante y cuyos campos vectoriales no tienen una orientación especial. Se dividen en atractivos (Figura 2.1b) o repulsivos (Figura 2.1c) y se diferencian por la dirección del movimiento.

2.3.1.2.2 Puntos deslizantes especiales

Son puntos aislados en el límite de discontinuidad que están acompañados a ambos lados solo por grupos de puntos de un mismo tipo y que además poseen una característica especial en alguno de sus campos vectoriales: campos vectoriales nulos, tangentes al límite de discontinuidad o anticolineales.

Estos puntos se simbolizan por un círculo en el cual la mitad inferior contiene la característica del campo vectorial f_i y la mitad superior la del campo vectorial f_j . Un punto (•) simboliza tangencia, una cruz (×) simboliza un vector nulo y un triángulo (∇) simboliza anticolinealidad. Algunos puntos tienen una dirección particular que se simboliza mediante zonas sombreadas.

Puntos tangentes: Uno de sus campos vectoriales es tangente al límite de discontinuidad. Pueden ser atractivos (Figura 2.1d) o repulsivos (Figura 2.1e) y se diferencian por la dirección del movimiento deslizante.

Puntos nulos: Uno de sus campos vectoriales es cero. Pueden ser atractivos (Figura 2.1f) o repulsivos (Figura 2.1g) y se diferencian por la dirección del movimiento deslizante.

Punto tangente-nulo: Uno de sus campos vectoriales es tangente al límite de discontinuidad y el otro es cero. Se diferencian por la dirección del movimiento deslizante. (Figura 2.1h).

Punto tangente-tangente: Sus campos vectoriales son tangentes al límite de discontinuidad. Se diferencian por la dirección de los campos vectoriales. (Figura 2.1i).

Punto nulo-nulo: Sus campos vectoriales son cero (Figura 2.1j).

Puntos anticolineales: Sus campos vectoriales tienen direcciones opuestas pero igual magnitud. Pueden ser atractivos (Figura 2.1k) o repulsivos (Figura 2.1l) y se diferencian por la dirección de los campos vectoriales.

Punto nulo-perpendicular: Uno de sus campos vectoriales es cero y el otro es perpendicular al límite de discontinuidad. Pueden ser atractivos (Figura 2.1m) o repulsivos (Figura 2.1n).








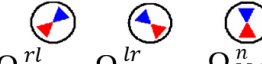


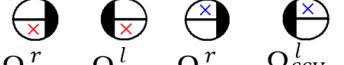


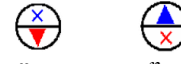
(a)		(h)	
(b)		(i)	
(c)		(j)	
(d)		(k)	
(e)		(l)	
(f)		(m)	
(g)		(n)	

Figura 2.1. Símbolos y nombres de los puntos sobre el límite de discontinuidad

2.3.2 Detección de bifurcaciones locales

La aparición de puntos deslizantes especiales indica un evento sobre el límite de discontinuidad, como el inicio o fin de un segmento deslizante, el cambio de la dirección del cruce, el cambio de dirección de un segmento deslizante o el cambio en la estabilidad (atractivo o repulsivo) del deslizamiento.

Cada dinámica local en un sistema de Filippov tiene en el límite de discontinuidad una secuencia única de segmentos de puntos regulares alternados con puntos

especiales aislados determinando tales eventos. De esta forma, cualquier cambio en esta secuencia indica un cambio en la dinámica.

El método SPT identifica, para cada incremento del parámetro analizado, las secuencias de segmentos y puntos especiales sobre los límites de discontinuidad mediante las funciones booleanas propuestas en [6] y las compara con las halladas para el valor anterior del parámetro. Cuando la cantidad, el tipo o el orden de los elementos (segmentos y puntos especiales) de la secuencia cambian se ha presentado una bifurcación.

Los resultados de la evaluación anterior son presentados en una gráfica llamada *diagrama de bifurcación* que muestra los tipos de puntos en el límite de discontinuidad, graficando en un eje una de las variables de estado y en el otro los valores del parámetro.

2.3.3 Detección de bifurcaciones globales

Las bifurcaciones globales en sistemas de Filippov implican la interacción de una órbita periódica o ciclo con el límite de discontinuidad, que puede añadir o restar al ciclo segmentos deslizantes o puntos especiales en el límite de discontinuidad, o inclusive hacerlo desaparecer.

Un ciclo en un sistema de Filippov puede estar compuesto solo por segmentos Φ_i de puntos de una región suave Z_i o incluir segmentos deslizantes Φ_s y puntos especiales en el límite de discontinuidad. Cuando el ciclo contiene segmentos deslizantes, es llamado *ciclo deslizante*.

Al igual que sucede con las dinámicas locales, cada tipo de ciclo tiene una secuencia diferente de segmentos y puntos en las regiones suaves y en los límites de discontinuidad. Las diferencias en las secuencias indican un cambio en la dinámica global.

El método SPT utiliza el proceso de integración para recolectar, en cada valor del parámetro analizado, la secuencia de las diferentes clases de segmentos y puntos pertenecientes a los ciclos presentes en la dinámica. Esta secuencia es comparada con la secuencia obtenida para el valor anterior del parámetro. Cuando se presenta un cambio en la cantidad, el tipo o el orden de los elementos se ha presentado una bifurcación global.

Para definir la secuencia de cada ciclo, [6] ha desarrollado una notación para identificar cada elemento. Los segmentos de puntos de una región suave Z_i se simbolizan por Φ_i y los segmentos deslizantes en un límite de discontinuidad por Φ_s^{\rightarrow} o Φ_s^{\leftarrow} dependiendo de la dirección del movimiento. Los símbolos \odot y \ominus

indican que la secuencia se repite continuamente y la dirección de giro del ciclo. Finalmente, $\Omega_s^{(\sim)}$ representa un punto intermedio en un segmento deslizante, $\Omega_s^{(-)}$ el punto inicial y $\Omega_s^{(+)}$ el punto final del segmento.

2.3.4 Proceso de integración

La localización precisa de los eventos discontinuos en los sistemas no suaves, como el inicio o fin del movimiento deslizante, el cruce de una región a otra o la llegada a un punto especial en el límite de discontinuidad, es vital para la detección de bifurcaciones y la modelación acertada de la dinámica del sistema.

Cuando en el proceso de integración la evolución del sistema cruza un límite de discontinuidad, es necesario retroceder en la integración para hallar el punto sobre el límite de discontinuidad y asegurar la localización de cualquier evento. De la misma manera, cuando la trayectoria del sistema pasa de movimiento deslizante a cruce, es importante encontrar el punto final del segmento deslizante.

El método SPT incluye un procedimiento llamado *reversa* que permite hallar estos puntos. Para el primer caso, la trayectoria y el límite de discontinuidad son representados como curvas en el espacio y su intersección define la ubicación del punto en cuestión. En el segundo caso el tamaño de paso es disminuido a un valor infinitesimal hasta encontrar el punto final del segmento.

3 CARACTERIZACIÓN DE PUNTOS EN LAS REGIONES SUAVES

El método SPT se basa en la identificación y seguimiento de algunos puntos con características especiales sobre los conjuntos de discontinuidad cuyo análisis puede ayudar a encontrar o detectar bifurcaciones no suaves. Sin embargo, el método debe también contribuir a comprender las dinámicas en las regiones suaves. Para esto se presenta en este capítulo la caracterización de los puntos sobre las regiones suaves, deduciendo funciones booleanas que permiten identificar los tipos de puntos de equilibrio y la dirección de giro de los puntos regulares, en sistemas lineales y no lineales.

3.1 Caracterización de puntos de equilibrio y puntos regulares sobre las regiones suaves

Considere el sistema dinámico autónomo descrito por la ecuación diferencial ordinaria (3.1) con $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

Para caracterizar los puntos sobre el espacio de estados del sistema (3.1) se definirá un punto de análisis \mathbf{x}_b , se evaluará el campo vectorial f en este punto, definiendo f_1 y f_2 según la ecuación (3.2) y se deducirán las funciones booleanas que permitan identificar las características del punto de análisis mediante la utilización de la función $B(\cdot)$ descrita en la ecuación (3.3).

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$B(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ es verdadero} \\ 0 & \text{si } q \text{ es falso} \end{cases} \quad (3.3)$$

Un vector \mathbf{x} para el cual $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, es denominado punto de equilibrio. Los demás puntos son denominados puntos regulares. De esta manera, se puede determinar que \mathbf{x}_b es un punto de equilibrio si la función booleana P_s definida en la ecuación (3.4), donde ε es un valor de tolerancia, da como resultado 1. De lo contrario, \mathbf{x}_b es un punto regular.

$$P_s = B[f_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)] \wedge B[f_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)] \quad (3.4)$$

Los puntos de equilibrio se pueden clasificar como: Nodo estable, nodo inestable, silla, foco estable, foco inestable o centro.

3.2 Caracterización de puntos de equilibrio en las regiones suaves para sistemas lineales

Suponga que el sistema (3.1) es un sistema lineal y su campo vectorial es como el de la ecuación (3.5).

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \quad (3.5)$$

Para la identificación de los diferentes tipos de puntos de equilibrio se utilizarán los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz \mathbf{A} , definidos como las raíces de la ecuación característica (3.6).

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.6)$$

3.2.1 Nodo estable

El punto \mathbf{x}_b es un nodo estable si la función booleana P_{NS} definida en la ecuación (3.7) da como resultado 1.

$$P_{NS} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 < 0) \wedge B(\lambda_2 < 0) \quad (3.7)$$

En este caso, todas las soluciones tienden al punto \mathbf{x}_b como se muestra en la Figura 3.1 para el sistema de la ecuación (3.8).

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

En este sistema el nodo estable es el punto $\mathbf{x} = (0,0)$, en el cual $f(\mathbf{x}) = (0,0)$ y por lo tanto cumple la condición de punto de equilibrio de la función booleana P_s (ecuación (3.4)). Su ecuación característica es $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ con valores propios $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -1$, ambos menores que cero como lo requiere la función P_{NS} de la ecuación (3.7).

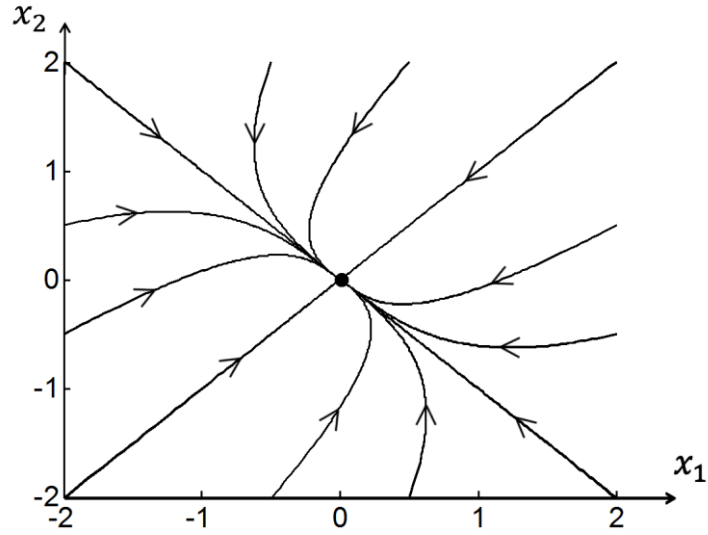


Figura 3.1. Sistema con nodo estable

3.2.2 Nodo inestable

El punto \mathbf{x}_b es un nodo inestable si la función booleana P_{NU} definida en la ecuación (3.9) es 1.

$$P_{NU} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 > 0) \wedge B(\lambda_2 > 0) \quad (3.9)$$

Como se muestra en la Figura 3.2 para el sistema de la ecuación (3.10), en un sistema con un nodo estable \mathbf{x}_b todas las soluciones se alejan de él.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

El nodo estable para este sistema es el punto $\mathbf{x} = (0,0)$, en el cual $f(\mathbf{x}) = (0,0)$ y su ecuación característica es $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, ambos mayores que cero. Por tanto, se cumplen las condiciones de la función booleana P_{NU} en la ecuación (3.9).

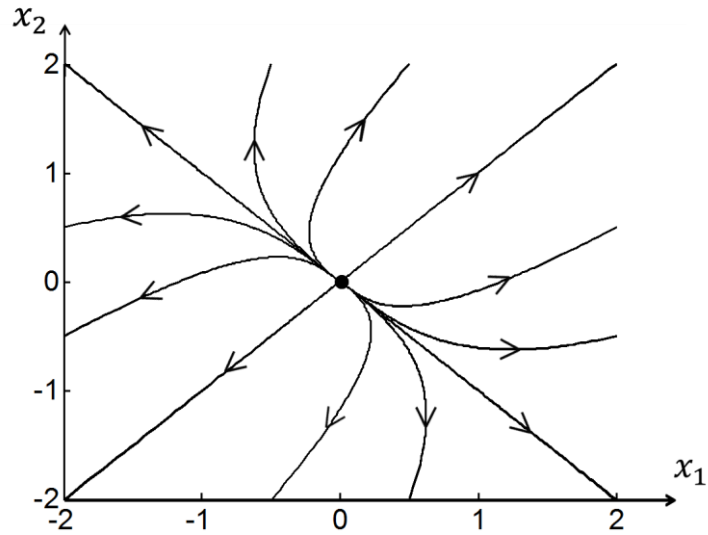


Figura 3.2. Sistema con nodo inestable

3.2.3 Punto Silla

El punto \mathbf{x}_b es un punto silla si la función booleana definida en la ecuación (3.11) da 1 como resultado.

$$P_{SP} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 \lambda_2 < 0) \quad (3.11)$$

En la Figura 3.3 se muestra retrato de fase para el sistema de la ecuación (3.12). Se observa que se tienen dos soluciones que se acercan o se alejan del origen en línea recta. Estas soluciones son llamadas línea estable y línea inestable, respectivamente. Las demás soluciones se alejan del origen en dirección de la línea inestable.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

El punto $\mathbf{x} = (0,0)$, en el cual $f(\mathbf{x}) = (0,0)$, es el punto silla del sistema (3.12) y su ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ con valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, con signos opuestos. De esta manera, se cumplen las condiciones de la función booleana P_{SP} en la ecuación (3.11).

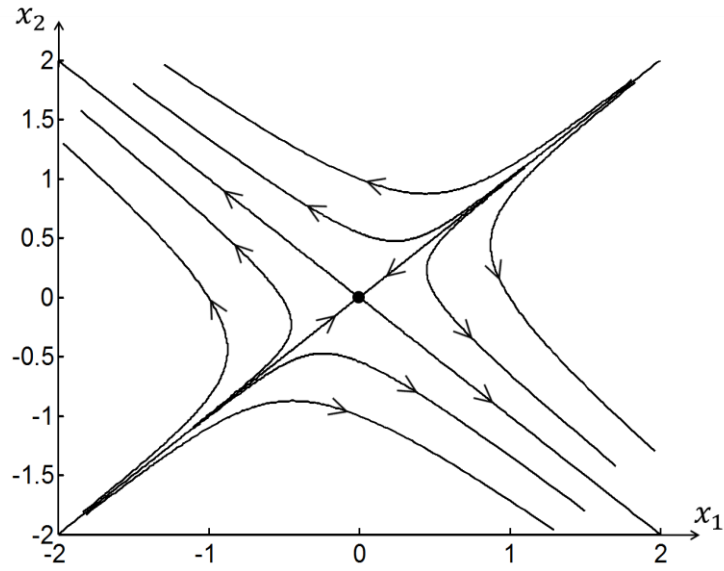


Figura 3.3. Sistema con punto silla

3.2.4 Centro:

El punto \mathbf{x}_b es un centro si la función booleana definida en la ecuación (3.13), donde $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, es 1.

$$P_C = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{C}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{C}) \wedge B(\alpha = 0) \quad (3.13)$$

Las orbitas, para este caso son elipses alrededor del punto de equilibrio, como se muestra en la Figura 3.4 para el sistema de la ecuación (3.14).

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -3x_1 + 3x_2 \\ -6x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Para este sistema, en el punto $\mathbf{x} = (0,0)$ se cumple que $f(\mathbf{x}) = (0,0)$. Su ecuación característica es $\lambda^2 + 9 = 0$ con valores propios $\lambda_1 = 3i$ y $\lambda_2 = -3i$, imaginarios y con parte real α cero. De modo que, según la ecuación (3.13), el punto $\mathbf{x} = (0,0)$ es un centro.

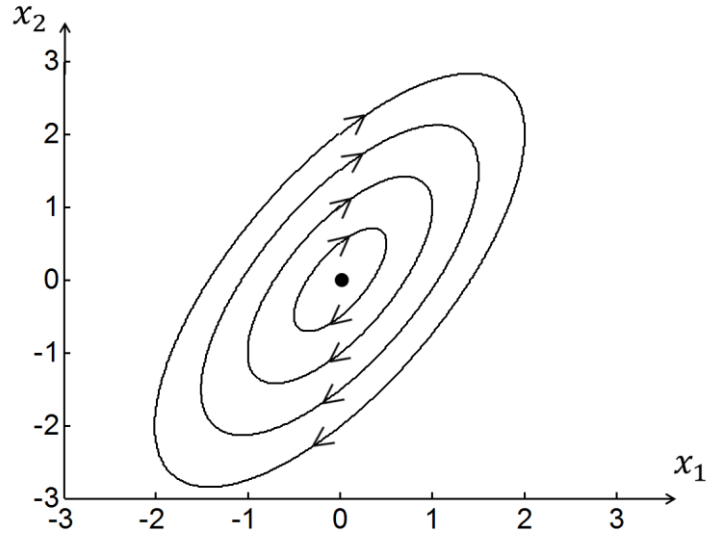


Figura 3.4. Sistema con centro

3.2.5 Foco estable:

El punto \mathbf{x}_b es un foco estable si la función booleana definida en la ecuación (3.15), donde $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, es 1.

$$P_{FS} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{C}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{C}) \wedge B(\alpha < 0) \quad (3.15)$$

Todas las soluciones de un sistema lineal con un foco estable son espirales que se acercan al origen, como se muestra en la Figura 3.5 para el sistema de la ecuación (3.16).

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0.5x_1 + x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Para este sistema, en el punto $\mathbf{x} = (0,0)$ se cumple que $f(\mathbf{x}) = (0,0)$. Su ecuación característica es $\lambda^2 + 0.5\lambda + 1.5 = 0$ con valores propios $\lambda_1 = -0.25 + 1.199i$ y $\lambda_2 = -0.25 - 1.199i$, complejos y con parte real α negativa. De modo que, según la ecuación (3.15), el punto $\mathbf{x} = (0,0)$ es un foco estable.

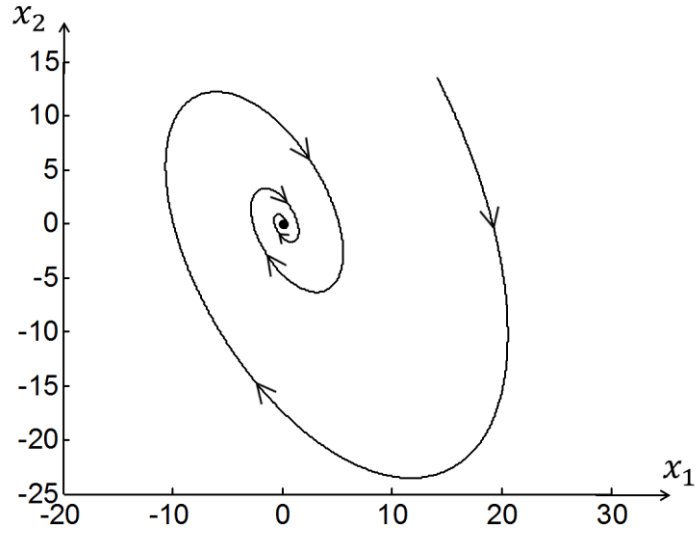


Figura 3.5. Sistema con foco estable

3.2.6 Foco inestable:

El punto \mathbf{x}_b es un foco inestable si la función booleana definida en la ecuación (3.17), donde $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, es 1.

$$P_{FU} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{C}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{C}) \wedge B(\alpha > 0) \quad (3.17)$$

Todas las soluciones de un sistema lineal con un foco inestable son espirales que se alejan del origen, como se muestra en la Figura 3.6 para el sistema de la ecuación (3.18).

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -0.5x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Para este sistema, el foco inestable es el punto $\mathbf{x} = (0,0)$ en el cual $f(\mathbf{x}) = (0,0)$. Su ecuación característica es $\lambda^2 - 0.5\lambda + 1.5 = 0$ con valores propios $\lambda_1 = 0.25 + 1.199i$ y $\lambda_2 = 0.25 - 1.199i$, complejos y con parte real α positiva. De esta forma, se cumplen las condiciones de la ecuación (3.17).

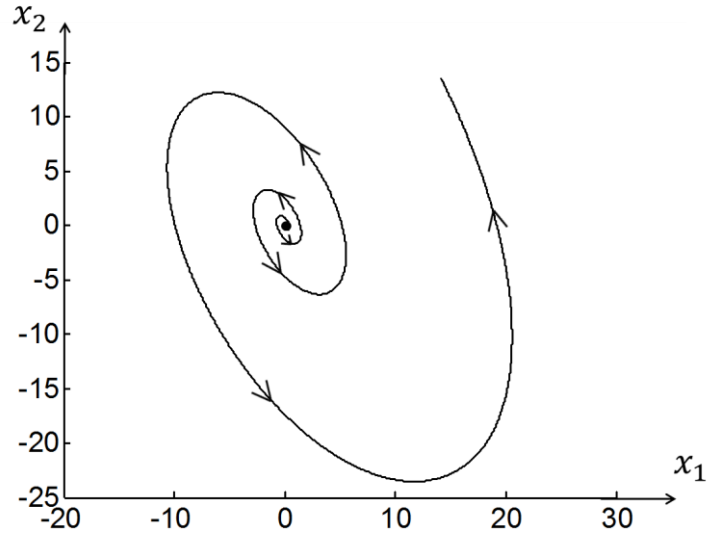


Figura 3.6. Sistema con foco inestable

Finalmente, para un centro, un foco estable y un foco inestable, la órbita gira en torno a las manecillas del reloj si para un punto $\mathbf{p} = (0, x_2)$, $f_1(\mathbf{p})$ y x_2 tienen el mismo signo. Es decir, si la función booleana definida en la ecuación (3.19) es 1.

$$CW = B(f_1(0, x_2) \cdot x_2 > 0) \quad (3.19)$$

La órbita gira en dirección contraria a las manecillas del reloj si la función CW es 0.

3.3 Caracterización de puntos en las regiones suaves para sistemas no lineales

Suponga que el sistema (3.1) es un sistema no lineal con un punto de equilibrio en $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ y que f_1 y f_2 son funciones continuamente diferenciables. En la vecindad de \mathbf{p} , este sistema se puede aproximar a un sistema lineal $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, definiendo \mathbf{A} como en la ecuación (3.20) y tomando $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$. Este proceso es llamado linealización y a la matriz \mathbf{A} se le llama matriz jacobiana en $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

En la mayoría de los casos, el comportamiento de un sistema lineal cerca de un punto de equilibrio puede determinarse por medio de linealización alrededor de

éste, por lo cual puede identificarse el tipo de punto de equilibrio para el sistema no lineal (3.1), analizando los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz Jacobiana A como se explica a continuación.

Si la función booleana de la ecuación (3.21) da 1 como resultado, el punto de equilibrio \mathbf{x}_b , es estable pero no es posible determinar si es un nodo o un foco.

$$P_{XS} = P_s \wedge B(\lambda_1 = \lambda_2) \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 < 0) \quad (3.21)$$

Si la función booleana de la ecuación (3.22) da 1 como resultado, el punto de equilibrio \mathbf{x}_b , es inestable pero nuevamente no se puede determinar si \mathbf{x}_b es un nodo o un foco.

$$P_{XU} = P_s \wedge B(\lambda_1 = \lambda_2) \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 > 0) \quad (3.22)$$

Excluyendo los dos casos anteriores y utilizando las ecuaciones (3.7) y (3.9) de la sección 3.2, se puede concluir que el punto \mathbf{x}_b es un nodo estable si la ecuación (3.23) es 1 y un nodo inestable si la ecuación (3.24) es 1.

$$P_{NLS} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 < 0) \wedge B(\lambda_2 < 0) \quad (3.23)$$

$$P_{NLU} = P_s \wedge B(\lambda_1 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_2 \in \mathbb{R}) \wedge B(\lambda_1 > 0) \wedge B(\lambda_2 > 0) \quad (3.24)$$

Si los valores propios son imaginarios puros como en la ecuación (3.13) de la sección 3.2 no es posible determinar si el punto de equilibrio \mathbf{x}_b es un centro o un foco ni tampoco analizar su estabilidad.

Finalmente, para determinar si el punto \mathbf{x}_b es un foco estable o un foco inestable se pueden utilizar las funciones booleanas de las ecuaciones (3.15) y (3.17) de la sección 3.2, respectivamente.

3.4 Caracterización de los puntos regulares sobre las regiones suaves

Los puntos regulares en el espacio de estados se pueden clasificar durante el proceso de integración según el sentido en el que giran, ya sea en la dirección de las manecillas del reloj o en dirección contraria.

3.4.1 Punto girando en la dirección de las manecillas del reloj:

La función para determinar la dirección de giro en el punto $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}^{(i)}$, se basa en que, si el punto gira en la dirección de las manecillas del reloj, el vector suma

$S = (S_1, S_2)$ de los dos campos vectoriales consecutivos $f(\mathbf{x}^{(i-1)})$ y $f(\mathbf{x}^{(i)})$, queda por debajo de los vectores $f(\mathbf{x}^{(i-1)})$ y $f(\mathbf{x}^{(i)})$, siempre que la primera componente de $f(\mathbf{x}^{(i)})$ sea positiva, y por encima de los vectores $f(\mathbf{x}^{(i-1)})$ y $f(\mathbf{x}^{(i)})$, si la primera componente de $f(\mathbf{x}^{(i)})$ es negativa. Lo contrario sucede si el punto gira en dirección contraria a las manecillas del reloj (ver Figura 3.7 y Figura 3.9).

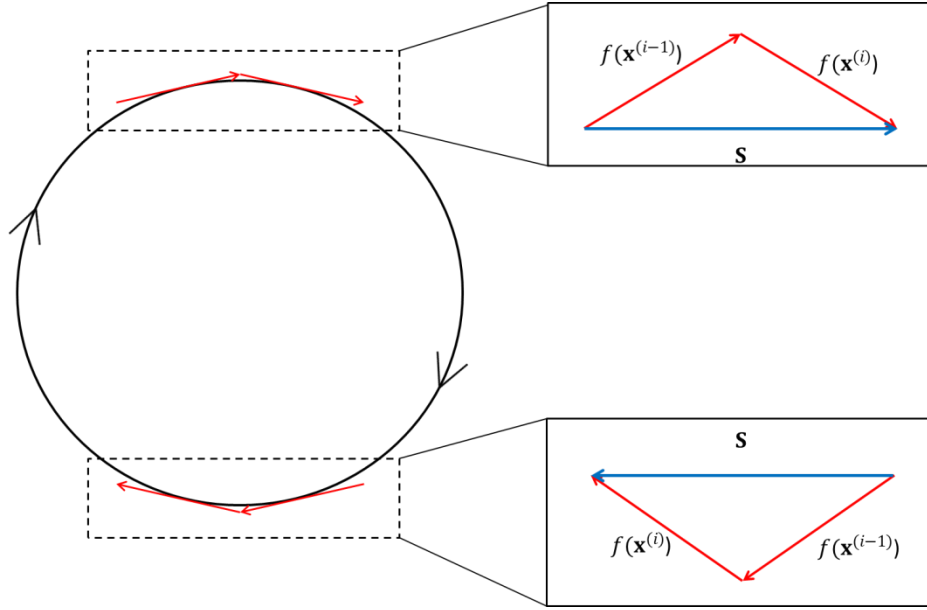


Figura 3.7. Campos vectoriales sobre una órbita girando en la dirección de las manecillas del reloj.

La posición del vector S con respecto a los vectores $f(\mathbf{x}^{(i-1)})$ y $f(\mathbf{x}^{(i)})$ se puede determinar utilizando un vector V con la misma dirección de S pero con primera componente de magnitud $f_1(\mathbf{x}^{(i)})$ como el de la ecuación (3.25) y como se muestra en la Figura 3.8.

$$V = (V_1, V_2) = \frac{f_1(\mathbf{x}^{(i)})}{S_1} (S_1, S_2) = \left(f_1(\mathbf{x}^{(i)}), f_1(\mathbf{x}^{(i)}) \frac{S_2}{S_1} \right) \quad (3.25)$$

S queda por debajo de los vectores $f(\mathbf{x}^{(i-1)})$ y $f(\mathbf{x}^{(i)})$ cuando $V_2 - f_2(\mathbf{x}^{(i-1)}) < 0$ y para que \mathbf{x}_b gire en dirección de las manecillas del reloj, la primera componente de $f(\mathbf{x}^{(i)})$ debe ser positiva. Luego $V_2 - f_2(\mathbf{x}^{(i-1)})$ y $f_1(\mathbf{x}^{(i)})$ deben tener signos contrarios.

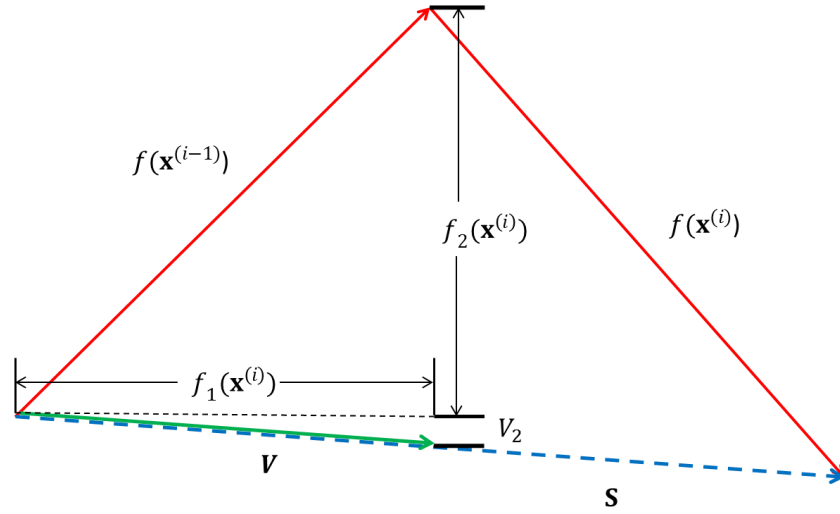


Figura 3.8. Esquema de los vectores f , S y V .

Un análisis similar puede hacerse utilizando las segundas componentes de los campos vectoriales.

Así, se puede concluir que el punto x_b gira en la dirección de las manecillas del reloj si la función booleana definida en la ecuación (3.26), con V_1 , V_2 y S como en las ecuaciones (3.27)-(3.29), es 1.

$$P_{CW} = B[(V_1 - f_1(x^{(i-1)}))f_2(x^{(i)}) > 0] \vee B[(V_2 - f_2(x^{(i-1)}))f_1(x^{(i)}) < 0] \quad (3.26)$$

$$V_1 = f_2(x^{(i-1)}) \frac{S_1}{S_2} \quad (3.27)$$

$$V_2 = f_1(x^{(i-1)}) \frac{S_2}{S_1} \quad (3.28)$$

$$S = f(x^{(i-1)}) + f(x^{(i)}) \quad (3.29)$$

3.4.2 Punto girando en dirección contraria a las manecillas del reloj:

El punto x_b gira en dirección contraria a las manecillas del reloj si la función booleana definida en la ecuación (3.30) es 1.

$$P_{CCW} = B[(V_1 - f_1(x^{(i-1)}))f_2(x^{(i)}) < 0] \vee B[(V_2 - f_2(x^{(i-1)}))f_1(x^{(i)}) > 0] \quad (3.30)$$

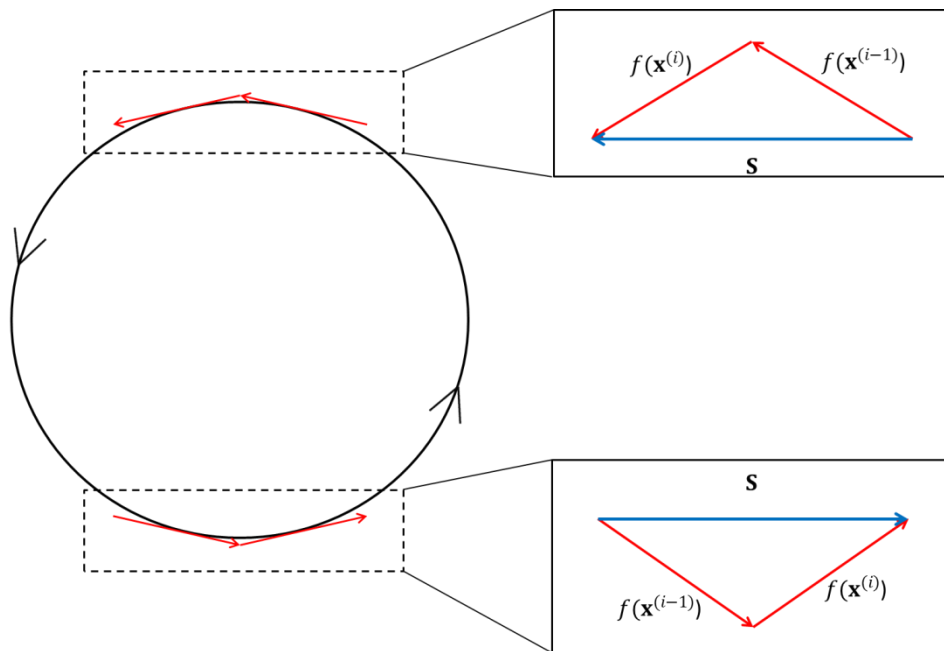


Figura 3.9. Campos vectoriales sobre una órbita girando en dirección contraria a las manecillas del reloj.

En la Figura 3.10 se muestran los símbolos utilizados para cada uno de los tipos de puntos sobre las suaves analizados en este capítulo.

	Nodo estable
	Nodo inestable
	Silla
	Foco estable
	Foco inestable
	Punto girando en dirección de las manecillas del reloj
	Punto girando en dirección contraria a las manecillas del reloj

Figura 3.10. Símbolos para los tipos de puntos sobre las zonas suaves.

4 PLANTEAMIENTO DE SISTEMAS NO SUAVES

Muchos de los sistemas presentes en los diferentes campos de la ciencia y de la ingeniería presentan algún tipo de no suavidad y su complejidad lleva a dificultades matemáticas y numéricas al momento de su análisis. Se presenta en este capítulo una síntesis de sistemas mecánicos, eléctricos, químicos, ecológicos y sociales que pueden ser modelados como sistemas no suaves o discontinuos y que han sido estudiados anteriormente por otros investigadores, junto con sus respectivas representaciones matemáticas.

3.1 Sistemas mecánicos

La mayoría de sistemas mecánicos están compuestos por múltiples elementos con mecanismos de funcionamiento diferentes. Cuando estos elementos interactúan, el sistema pasa de un comportamiento a otro y se presentan discontinuidades. Ejemplos de este tipo de sistemas no suaves en mecánica son aquellos con soportes formados por resortes y amortiguadores y sistemas con fricción seca o impacto, los cuales se tratarán en esta sección.

4.1.1 Sistemas sin deslizamiento

Esta clasificación incluye sistemas de campo vectorial continuo con Jacobiano discontinuo (tipo 1) o sistemas con campo vectorial discontinuo (tipo 2) pero que no presentan movimiento deslizante. Estos sistemas están constituidos generalmente por una masa que al alcanzar una posición específica hace contacto con un resorte, un amortiguador o ambos, cambiando la estructura del sistema.

Cuando la masa solo hace contacto con el resorte se trata de un sistema tipo 1, cuando hace contacto solo con el amortiguador, o con el resorte y el amortiguador el sistema es tipo 2.

4.1.1.1 Sistema con restricción resorte-amortiguador y fuerza gravitacional

En la Figura 4.1, se presenta un sistema constituido por una masa m en una superficie con inclinación θ que tiene un resorte y un amortiguador en la parte más baja. A la masa se le aplica una fuerza F . Cuando la masa alcanza la posición x_0 , se produce el contacto con el resorte y el amortiguador. El desplazamiento de la masa se denotará por x .

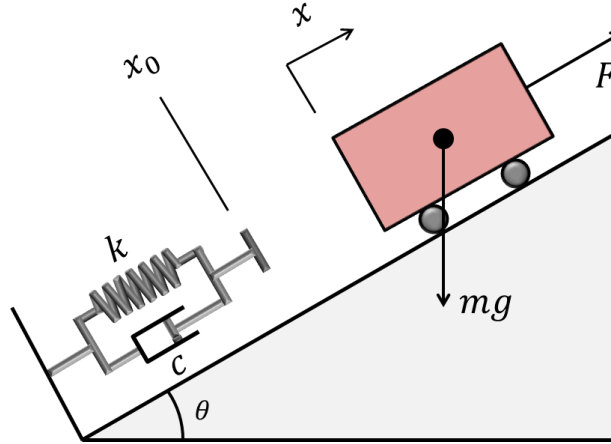


Figura 4.1. Sistema mecánico con resorte-amortiguador y fuerza gravitacional

Cuando $x > x_0$, la masa no tiene contacto con el resorte-amortiguador y se representa por la ecuación diferencial (4.1) o por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.2), con $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - mg \cos \theta \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{F}{m} - g \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Cuando $x < x_0$, la masa hace contacto con el resorte-amortiguador y la dinámica se representa por el sistema de ecuaciones (4.3).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}(x_1 - x_0) - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F}{m} - g \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Sin embargo, cuando la masa se está retirando de la restricción, una porción de la fuerza del resorte es contrarrestada por la resistencia del amortiguador, por lo cual el resorte ejerce una fuerza $-k(x_1 - x_0) - cx_2 > 0$ sobre la masa. Cuando $-k(x_1 - x_0) - cx_2 < 0$, toda la fuerza del resorte es consumida por el amortiguador, y puesto que la masa no está sujeta al sistema resorte-amortiguador, no experimenta fuerza alguna. En este último caso, el sistema se comporta según el sistema de ecuaciones (4.2).

De acuerdo a lo anterior, el límite de discontinuidad es el conjunto:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2): H_1(x_1, x_2) = 0 \vee H_2(x_1, x_2) = 0\} \quad (4.4)$$

con $H_1(x_1, x_2)$ y $H_2(x_1, x_2)$ definidas en (4.5) y (4.6).

$$H_1(x_1, x_2) = x_1 - x_0 \quad (4.5)$$

$$H_2(x_1, x_2) = -k(x_1 - x_0) - cx_2 \quad (4.6)$$

4.1.1.2 Sistema con restricción resorte-amortiguador longitudinal

Este modelo fue trabajado en [5], consiste en una masa sujeta por un lado a un resorte con rigidez k y a un amortiguador con coeficiente c , y por el otro lado a otro resorte con la misma rigidez que el anterior. A la masa se le aplica una fuerza periódica $\rho \cos(\omega t)$. El desplazamiento de la masa con respecto a la posición de equilibrio de los resortes se denota por x . En la posición x_0 se encuentra un soporte, que constituye la restricción al desplazamiento y está compuesto por un resorte de rigidez k_s y un amortiguador con coeficiente c_s . La estructura del sistema se presenta en la Figura 4.2.

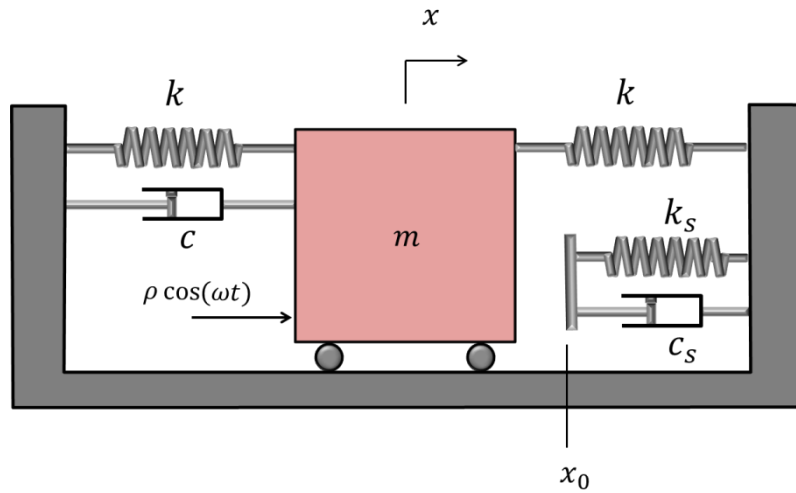


Figura 4.2. Sistema mecánico con restricción resorte-amortiguador longitudinal

Cuando $x < x_0$ ó $k_s(x - x_0) + c_s\dot{x} < 0$, el sistema resorte-amortiguador no ejerce fuerza sobre la masa y el sistema se representa mediante las ecuaciones (4.7), donde $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Cuando $x > x_0$ y $k_s(x - x_0) + c_s\dot{x} > 0$, el sistema resorte-amortiguador ejerce fuerza sobre la masa y el sistema se representa mediante las ecuaciones diferenciales (4.8).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m}x_1 - \frac{k_s}{m}(x_1 - x_0) - \frac{c + c_s}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

El límite de discontinuidad para este sistema es el conjunto de la ecuación (4.9) con $H_1(x_1, x_2)$ y $H_2(x_1, x_2)$ definidas en (4.10) y (4.11).

$$\Sigma = \{(x_1, x_2): H_1(x_1, x_2) = 0 \vee H_2(x_1, x_2) = 0\} \quad (4.9)$$

$$H_1(x_1, x_2) = x_1 - x_0 \quad (4.10)$$

$$H_2(x_1, x_2) = k_s(x_1 - x_0) + c_s x_2 \quad (4.11)$$

4.1.1.3 Sistema con restricción resorte tipo juego mecánico

En la Figura 4.3 se muestra un sistema estudiado en [6]. Una masa a la que se le aplica una fuerza $\rho \cos(\omega t)$ está sujeta a un resorte y a un amortiguador con coeficientes k y c , respectivamente. El desplazamiento de la masa con respecto a la posición de equilibrio del resorte y el amortiguador se denota por x . El sistema tiene un resorte adicional que solo hace contacto con la estructura a la que está sujeta la masa cuando ha consumido el juego mecánico disponible.

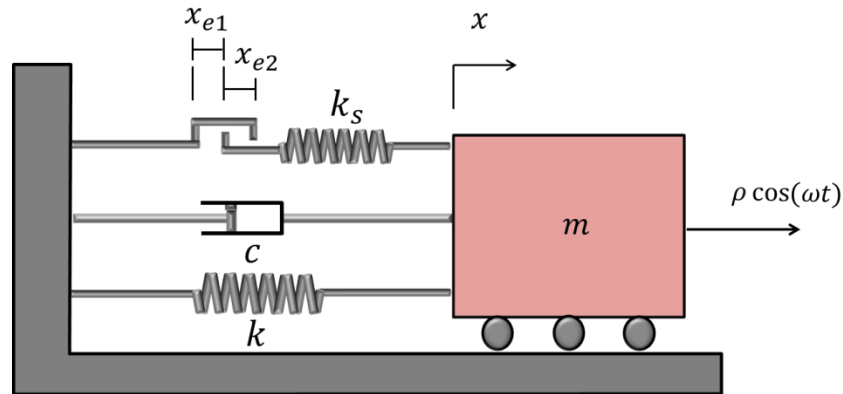


Figura 4.3. Sistema con restricción resorte tipo juego mecánico

Este sistema tiene campos vectoriales continuos y Jacobiano discontinuo, debido a que la restricci3n es totalmente el1stica. El sistema, adem1s, tiene tres campos vectoriales diferentes.

Cuando $-x_{e1} < x < x_{e2}$, el resorte no est1 en contacto con la estructura y la din1mica se representa mediante el sistema de ecuaciones (4.12), con $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Cuando $x < -x_{e1}$ 3 $x > x_{e2}$, el resorte est1 en contacto con la estructura. En el primer caso, el sistema est1 representado por las ecuaciones (4.13) y en el segundo por las ecuaciones (4.14).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k_s}{m}(x_1 + x_{e1}) - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k_s}{m}(x_1 - x_{e2}) - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Este sistema tiene dos l3mites de discontinuidad $\Sigma_1 = \{(x_1, x_2): H_1(x_1, x_2) = 0\}$ y $\Sigma_2 = \{(x_1, x_2): H_2(x_1, x_2) = 0\}$ donde

$$H_1(x_1, x_2) = x_1 + x_{e1} \quad (4.15)$$

$$H_2(x_1, x_2) = x_{e2} - x_1 \quad (4.16)$$

4.1.1.4 Sistema con restricci3n resorte tipo juego mec1nico con fuerza gravitacional

Finalmente, el sistema de la Figura 4.4 tiene la misma estructura del sistema anterior, pero en este caso, la masa experimenta la fuerza de la gravedad adem1s de la fuerza peri3dica $\rho \cos(\omega t)$.

4.1.2 Sistemas con deslizamiento

Esta clasificación incluye los sistemas con campo vectorial discontinuo o sistemas de Filippov que presentan deslizamiento. Los sistemas mecánicos con fricción seca hacen parte de esta clasificación.

4.1.2.1 Masa sobre una banda transportadora con fricción seca

Un sistema similar al de la Figura 4.5 fue estudiado en [9]. Se trata de un bloque de masa m sobre una banda transportadora que se mueve con velocidad constante v_{dr} . A la masa, que está sujeta a un soporte fijo a través de un resorte de rigidez k y un amortiguador con coeficiente c , se le aplica una fuerza periódica $\rho \cos(\omega t)$. El desplazamiento del bloque con relación a la posición de equilibrio del resorte y el amortiguador será denotado por x . Hay presencia de fricción seca entre el bloque y la banda transportadora.

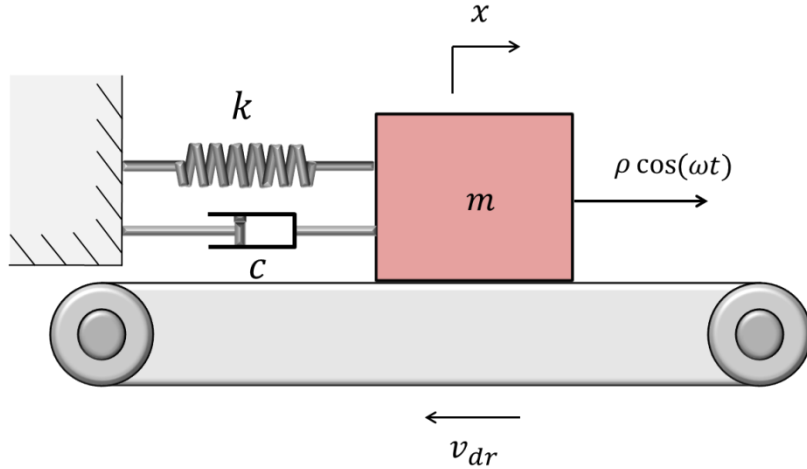


Figura 4.5. Masa sobre una banda transportadora con fricción seca

Cuando la fuerza periódica o las fuerzas ejercidas por el resorte y el amortiguador son mayores que la fuerza de fricción estática máxima F_s , el bloque se desliza con respecto a la banda transportadora con velocidad relativa $v_r = v_{dr} - \dot{x}$ y la banda transportadora ejerce una fuerza de fricción dinámica de magnitud F_f .

Sin embargo, puesto que la fuerza de fricción es contraria a la dirección del movimiento, su dirección es diferente cuando $v_r > 0$ y cuando $v_r < 0$, dando lugar a dos campos vectoriales distintos:

Cuando $v_r < 0$, la dirección del movimiento con relación a la banda es positiva y la dirección de la fuerza de fricción es negativa, en este caso la dinámica está

representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.20), donde $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} - \frac{F_f}{m} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Cuando $v_r > 0$, la dirección del movimiento con relación a la banda es negativa y la dirección de la fuerza de fricción es positiva, la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.21).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} + \frac{F_f}{m} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

El límite de discontinuidad para este sistema se presenta cuando $v_r = 0$ y está representado por $\Sigma = \{(x_1, x_2): H_1(x_1, x_2) = 0\}$ con $H_1(x_1, x_2) = v_{dr} - x_2$.

Cuando las fuerzas aplicadas sobre el bloque son menores que la fuerza de fricción estática máxima, el bloque se desplaza con la misma velocidad de la banda. Esta dinámica se define como un movimiento deslizante sobre el límite de discontinuidad Σ que puede ser determinado utilizando el campo vectorial de la ecuación (2.8) y cuya solución debe dar lugar a la ecuación (4.22) de desplazamiento del bloque.

$$x(t) = x(t_0) + v_{dr}(t - t_0) \quad (4.22)$$

4.1.3 Sistemas con impacto

Los sistemas en los cuales se presentan choques inelásticos entre dos cuerpos, presentan discontinuidad en las variables de estado dado que el impacto modifica la velocidad de los cuerpos. Se presenta a continuación un modelo introducido en [10].

4.1.3.1 Oscilador de impacto

El sistema de la Figura 4.6 consiste en un bloque de masa m sujeto a un soporte fijo mediante un resorte lineal de rigidez k y un amortiguador con coeficiente c . Al bloque se le aplica una fuerza periódica $\rho \cos(\omega t)$. El desplazamiento del bloque con relación a la posición de equilibrio será denotado por x . El sistema se mueve de forma suave, hasta que impacta con una superficie fija no elástica con posición x_0 .

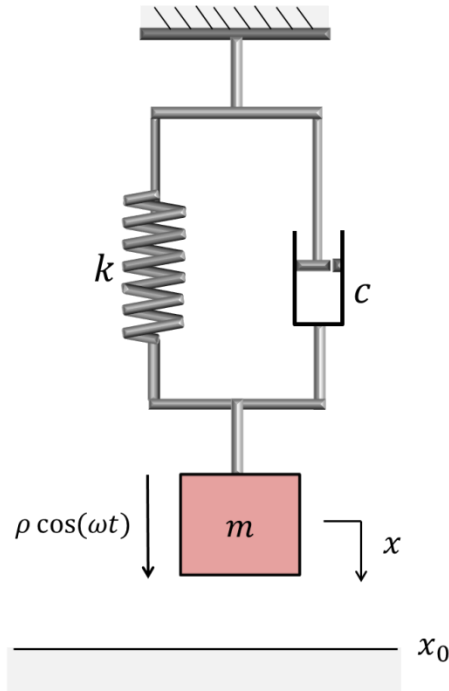


Figura 4.6. Oscilador de impacto

Cuando $x < x_0$, el bloque se mueve libremente y su dinámica se representa mediante las ecuaciones diferenciales (4.23), donde $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{\rho \cos(\omega t)}{m} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Cuando $x = x_0$, el sistema choca con la superficie, la velocidad del bloque disminuye debido al impacto y cambia de dirección. La posición y la velocidad del bloque inmediatamente después del impacto, x_1^+ y x_2^+ , se pueden determinar a través de la posición y la velocidad del bloque inmediatamente antes del impacto, x_1^- y x_2^- , mediante la ley de restitución de Newton (ecuaciones (4.24) y (4.25)), utilizando un factor r , con $0 \leq r \leq 1$, llamado *coeficiente de restitución*, que determina la cantidad de reducción en la velocidad del bloque.

$$x_1^+ = x_1^- \quad (4.24)$$

$$x_2^+ = -rx_2^- \quad (4.25)$$

La región en la cual $x > x_0$, se encuentra debajo de la superficie no elástica y es inaccesible. Por lo cual, su campo vectorial no está definido.

El límite de discontinuidad entre las dos regiones corresponde al impacto con la superficie y está representado por $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$ con $H(x_1, x_2) = x_1 - x_0$.

4.2 Sistemas electrónicos

Los convertidores de potencia son elementos electrónicos que tienen como fin transformar las características de la tensión y la corriente que reciben. Por estar conformados por interruptores, su dinámica está representada por sistemas no suaves, que presentan un conjunto de ecuaciones diferenciales diferentes, dependiendo de si el interruptor está conectado o desconectado. En esta sección se presentarán los convertidores Buck y Boost, que fueron estudiados ampliamente en [7], [8] y [9].

4.2.1 Convertidor Buck

Este convertidor reduce la tensión en la salida del sistema, conservando la misma polaridad. La estructura del convertidor se muestra en la Figura 4.7. Cuando el interruptor S está conectado, el diodo D bloquea el paso de la corriente, y la corriente de entrada fluye a través del interruptor, el inductor L , el capacitor C y la resistencia R . Cuando el interruptor S está desconectado, la corriente del inductor fluye a través del diodo, el inductor, el capacitor y la resistencia.

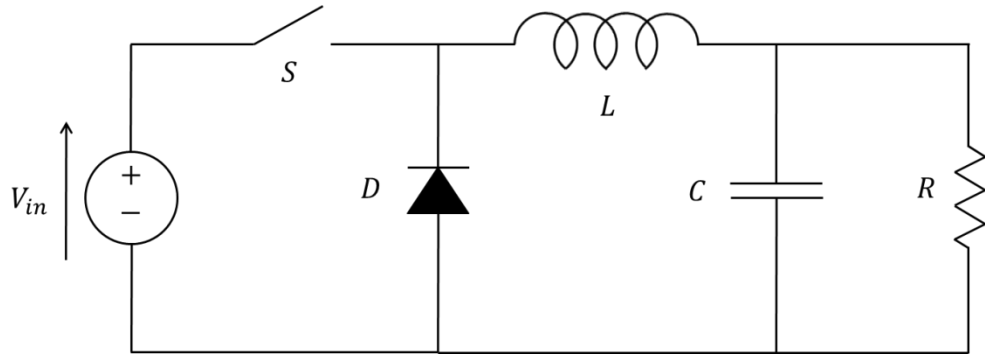


Figura 4.7. Estructura de un convertidor Buck

Cuando S está conectado, el sistema está representado por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.26), donde x_1 es la corriente, x_2 es el voltaje y V_{in} es el voltaje inicial en el convertidor.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \quad (4.26)$$

Cuando S está desconectado, la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.27).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Por lo general, existe un sistema de lazo cerrado para controlar el interruptor y mantener el voltaje de salida constante. El voltaje de salida es comparado con un voltaje de referencia V_{ref} y multiplicado por la ganancia A del lazo de realimentación. Finalmente, éste valor es comparado con una señal $f(t)$, de tal forma que, si $A(x_2 - V_{ref}) < f(t)$, el interruptor S debe estar conectado, mientras que si $A(x_2 - V_{ref}) > f(t)$, el interruptor S debe estar desconectado.

Así, el límite de discontinuidad para este sistema es el conjunto $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$, con $H(x_1, x_2)$ como en la ecuación (4.28).

$$H(x_1, x_2) = A(x_2 - V_{ref}) - f(t) \quad (4.28)$$

4.2.2 Convertidor Boost

Este convertidor aumenta la tensión en la salida del sistema, conservando la misma polaridad. La estructura del convertidor boost se muestra en la Figura 4.8. Cuando el interruptor S está conectado, el diodo D bloquea el paso de la corriente, y la corriente de entrada fluye a través del inductor L y el interruptor. Cuando el interruptor S está desconectado, la corriente fluye a través del inductor, el diodo, el capacitor C y la resistencia R .

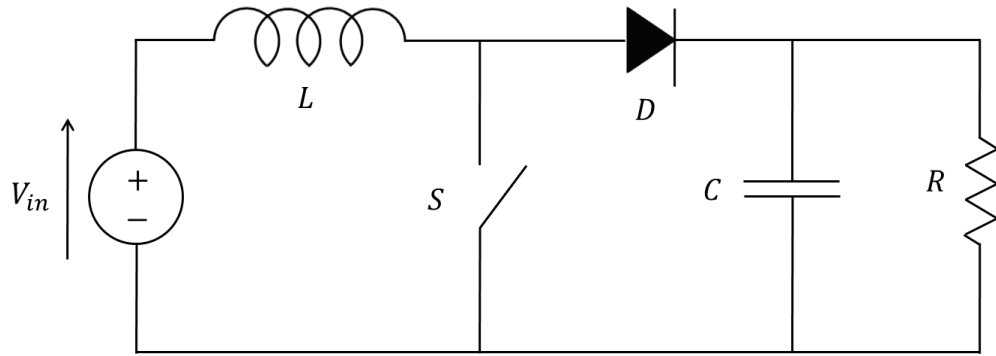


Figura 4.8. Estructura de un convertidor Boost

Cuando S está conectado, el sistema está representado por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.29), donde x_1 es la corriente, x_2 es el voltaje y V_{in} es el voltaje inicial en el convertidor.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \quad (4.29)$$

Cuando S está desconectado, la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.30).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \quad (4.30)$$

Al igual que en el convertidor Buck, el interruptor del convertidor Boost se controla mediante un sistema de lazo cerrado con ganancia A , por lo cual, el límite de discontinuidad para el sistema es el conjunto $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$, con $H(x_1, x_2)$ como en la ecuación (4.31), donde V_{ref} es el voltaje de referencia.

$$H(x_1, x_2) = A(x_2 - V_{ref}) - f(t) \quad (4.31)$$

4.3 Sistemas ecológicos

Los sistemas en los cuales poblaciones de individuos eligen entre hábitats o presas alternativas con el fin de maximizar su bienestar o aquellos en los que la explotación de una especie se realiza sólo cuando su densidad es mayor a un valor límite para no poner en riesgo a la especie, son sistemas no suaves, del tipo Filippov. En esta sección se presentan cuatro modelos de este tipo de sistemas, que fueron planteados y analizados en [14].

4.3.1 Dinámica de la explotación de una población

Este modelo representa la dinámica de los individuos de una misma población con densidades x_1 y x_2 para los individuos jóvenes y adultos, respectivamente, en la cual sólo los individuos adultos se reproducen y pueden ser explotados en un esfuerzo constante E siempre que su densidad x_2 sea mayor que un valor establecido P , con el fin de proteger la especie.

Cuando $x_2 < P$, los individuos adultos no están expuestos a explotación y el sistema está representado por el conjunto de ecuaciones diferenciales (4.32), en el cual a y d_1 son las tasas de crecimiento y muerte de los individuos jóvenes, d_2 es la tasa de muerte de los individuos adultos y b y c son los parámetros que caracterizan la función de nacimiento de nuevos individuos.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a + d_1)x_1 + b \frac{x_2}{c + x_2} \\ ax_1 - d_2x_2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Cuando $x_2 > P$, los individuos adultos están expuestos a explotación en un esfuerzo E y el sistema está representado por las ecuaciones (4.33), donde q es el coeficiente de captura de los individuos adultos.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a + d_1)x_1 + b \frac{x_2}{c + x_2} \\ ax_1 - (d_2 + qE)x_2 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

El límite de discontinuidad para el sistema es el conjunto $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$, con $H(x_1, x_2) = x_2 - P$.

4.3.2 Modelo depredador-presa con una presa alternativa

Este modelo describe la dinámica de dos poblaciones de individuos que comparten el mismo hábitat: un depredador con densidad de población x_2 que se alimenta de una presa con densidad de población x_1 y que además puede alimentarse de una segunda presa con densidad constante P cuando la primera presa no es abundante. El depredador se alimentará de la primera presa cuando su densidad x_1 sea mayor que un valor límite x_1^* y se alimentará de la segunda presa en el caso contrario, de tal forma que se maximice su bienestar \dot{x}_2/x_2 . Finalmente, el depredador es explotado en un esfuerzo constante E .

Cuando $x_1 < x_1^*$, la presa habitual no es explotada y el depredador se alimenta de la presa alternativa, por lo cual el sistema está representado por las ecuaciones (4.34), en las cuales r es la tasa de crecimiento de la presa, K es la cantidad de presas que puede sustentar el medio ambiente, a' , b' y c' son la tasa de depredación máxima, la constante de saturación media y la eficiencia del depredador con respecto a la presa alternativa y d y q son la tasa de muerte y el coeficiente de captura del depredador.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) \right] \\ x_2 \left[c' a' \frac{P}{b' + P} - d - qE \right] \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Cuando $x_1 > x_1^*$, el depredador se alimenta de su presa habitual y la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.35), donde a , b y c son la tasa de depredación máxima, la constante de saturación media, y la eficiencia del depredador con respecto a su presa habitual.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) - a \frac{x_2}{b + x_1} \right] \\ x_2 \left[ca \frac{x_1}{b + x_1} - d - qE \right] \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

El valor x_1^* para el cual el bienestar del depredador \dot{x}_2/x_2 es el igual si se alimenta de cualquiera de las dos presas es:

$$x_1^* = \frac{c'a'}{ca} \frac{bP}{b' + (1 - (c'a'/ca))P} \quad (4.36)$$

Y el límite de discontinuidad está dado por $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$, donde $H(x_1, x_2) = x_1 - x_1^*$.

4.3.3 Modelo depredador-presa con un hábitat alternativo para la presa

En este modelo se describe la dinámica de dos poblaciones de individuos: un depredador con densidad de población x_2 que se alimenta de una presa con densidad de población x_1 , la cual, además, tiene disponible un segundo hábitat menos rico que el natural, pero más seguro. La presa vivirá en su hábitat natural mientras la densidad x_2 del depredador sea menor que un valor límite x_2^* y vivirá en su hábitat alternativo, en el caso contrario, de manera que se maximice su bienestar \dot{x}_1/x_1 . El depredador es explotado en un esfuerzo constante E .

Cuando $x_2 < x_2^*$, la presa vive en su hábitat natural y el sistema está representado por las ecuaciones diferenciales (4.37), con los mismos parámetros del modelo 4.3.2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) - a \frac{x_2}{b + x_1} \right] \\ x_2 \left[ca \frac{x_1}{b + x_1} - d - qE \right] \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Cuando $x_2 > x_2^*$, la presa vive en el hábitat alternativo en el cual la tasa de crecimiento de la presa, la capacidad de sustento y la tasa de depredación máxima son reducidas en un factor $P > 1$. El sistema está representado por las ecuaciones (4.38).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \left[\frac{r}{P} \left(1 - \frac{Px_1}{K} \right) - \frac{a}{P} \frac{x_2}{b + x_1} \right] \\ x_2 \left[c \frac{a}{P} \frac{x_1}{b + x_1} - d - qE \right] \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

El valor x_2^* para el cual el bienestar \dot{x}_1/x_1 de la presa es el mismo en cualquiera de los dos hábitats es:

$$x_2^* = \frac{r}{a}(b + x_1) \quad (4.39)$$

Y el límite de discontinuidad, para el sistema es el conjunto $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$, con $H(x_1, x_2) = x_2 - x_2^*$.

4.3.4 Modelo depredador-presa con restricciones de caza para el depredador

Este modelo representa la dinámica de dos poblaciones de individuos que comparten un mismo hábitat: un depredador con densidad de población x_2 que se alimenta de una sola presa con densidad de población x_1 . Con el fin de proteger la especie, el depredador puede ser explotado por el hombre en un esfuerzo constante E solo cuando su densidad x_2 supere un valor límite P .

Cuando $x_2 < P$, el depredador no está expuesto a explotación y el sistema está representado por el conjunto de ecuaciones diferenciales (4.40), con los mismos parámetros del modelo 3.3.2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) - a \frac{x_2}{b + x_1} \right] \\ x_2 \left[ca \frac{x_1}{b + x_1} - d \right] \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Cuando $x_2 > P$, el depredador está expuesto a explotación en un esfuerzo E , y la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.41).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) - a \frac{x_2}{b + x_2} \right] \\ x_2 \left[ca \frac{x_1}{b + x_1} - d - qE \right] \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

El límite de discontinuidad para el sistema es $\Sigma = \{(x_1, x_2): H(x_1, x_2) = 0\}$, con $H(x_1, x_2) = x_2 - P$.

4.4 Sistema químico

Los sistemas en los cuales hay presencia de un líquido y un gas dentro de un mismo contenedor con un solo tubo de salida, deben ser modelados como sistemas no suaves, puesto que el gas y el líquido poseen comportamientos diferentes.

4.4.1 Contenedor líquido-gas

Este sistema, propuesto en [15], consiste en un tanque de volumen V alimentado por un gas ideal y un líquido incompresible a tasas de flujo constantes F_G y F_L , respectivamente. La estructura del sistema se presenta en la Figura 4.9. El tanque tiene un único tubo de salida, por lo cual, si el nivel del líquido está por encima del tubo de salida, el líquido sale del tanque, de lo contrario, el gas sale del tanque. La válvula se puede abrir en una proporción x , con $0 < x \leq 1$ y la tasa de flujo a través de ésta es proporcional a la diferencia entre la presión del tanque y la presión en el exterior del tanque P_{out} .

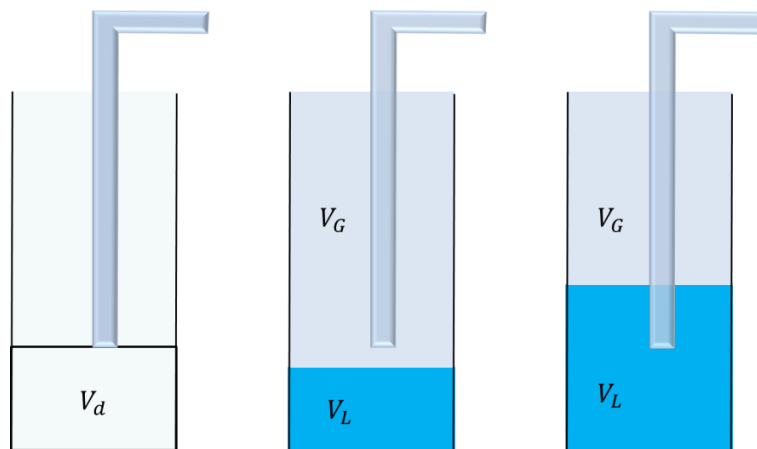


Figura 4.9. Contenedor líquido gas

Como se muestra en la Figura 4.9, el volumen V_L del líquido y el volumen V_d bajo el tubo de salida determinarán cuál sustancia sale del contenedor, si el líquido o el gas.

Cuando $V_L < V_d$, el gas sale del tanque y la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.42), donde x_1 y x_2 son la cantidad (en moles) de gas y de líquido respectivamente, K_G es la capacidad de flujo de gas en la válvula, R es la constante universal de los gases, T es la temperatura absoluta y $P = \frac{x_1 RT}{V - x_2 / \rho_L}$ es la presión dentro del tanque.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_G - K_G x \left(\frac{x_1 RT}{V - x_2 / \rho_L} - P_{out} \right) \\ F_L \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Cuando $V_L > V_d$, el líquido sale del tanque y la dinámica está representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.43), donde K_L es la capacidad de flujo de líquido en la válvula.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_G \\ F_L - K_L x \left[\frac{x_1 RT}{V - x_2 / \rho_L} - P_{out} \right] \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Puesto que el volumen del líquido se define como $V_L = x_2 / \rho_L$, donde ρ_L es la densidad de éste, el límite de discontinuidad para el sistema es el conjunto $\Sigma = \{(x_1, x_2) : H(x_1, x_2) = 0\}$, con $H(x_1, x_2) = x_2 / \rho_L - V_d$.

4.5 Sistemas sociales

Los sistemas en los cuales las decisiones de individuos o grupos de una sociedad dependen de ciertas condiciones o de alguna situación en particular, deben modelarse como sistemas no suaves. A continuación se presentará un modelo que representa la dinámica de una democracia constituida por dos partidos y que fue analizado en [16].

4.5.1 Democracias de dos partidos

Este modelo representa la dinámica de una democracia constituida por solo dos partidos políticos D y R , cada uno de los cuales cuenta con un grupo de presión cuyos integrantes pueden desgastar el bienestar que brinda el gobierno. Cada T años se realizan elecciones y las personas votan por el partido con el grupo de presión que representa una menor amenaza para el bienestar del pueblo al momento de las elecciones.

Cuando uno de los partidos se encuentra en el poder, el tamaño de su grupo de presión puede aumentar y una pequeña fracción de los integrantes del grupo de presión del partido opuesto tiende a cambiarse al grupo de presión del gobierno actual. Mientras que, si el partido no se encuentra en el poder, algunos integrantes de su grupo de presión abandonan su actividad y el tamaño del grupo disminuye.

Las variables de estado para este sistema son el bienestar social x_1 , con $0 \leq x_1 \leq 1$ y el tamaño x_2 y x_3 de los grupos de presión de los partidos D y R , respectivamente.

Cuando, al momento de las elecciones, el desgaste del bienestar social por parte del grupo de presión D es menor que el del grupo de presión R , el partido D es elegido y su grupo de presión aumenta mientras que el del partido R disminuye.

En este caso, la dinámica está representada por el conjunto de ecuaciones diferenciales (4.44), donde r es la tasa de crecimiento del bienestar social cuando no existen grupos de presión, a_D es la tasa a la que disminuye el bienestar social por cada integrante del grupo de presión del partido D , e_D es el factor de proporción entre el desgaste del bienestar y la entrada de nuevos integrantes al partido D , k_R es la fracción de integrantes del partido R que se pasan al partido D y d_i es la tasa a la cual los integrantes abandonan el grupo de presión i , para $i \in \{D, R\}$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - x_1 - a_D x_2)x_1 \\ (e_D a_D x_1 - d_D)x_2 + k_R x_3 \\ (-d_R - k_R)x_3 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Cuando, por el contrario, el desgaste del bienestar social por parte del grupo de presión D es mayor que el del grupo de presión R , el partido R es llevado al poder y su grupo de presión aumenta mientras que el del partido D disminuye.

En este escenario, el sistema está representado por el conjunto de ecuaciones diferenciales (4.45), donde, a_R es la tasa a la que disminuye el bienestar social por cada integrante del grupo de presión del partido R , e_R es el factor de proporción entre el desgaste del bienestar y la entrada de nuevos integrantes al partido R y k_D es la fracción de integrantes del partido D que se pasan al partido R .

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - x_1 - a_R x_3)x_1 \\ (-d_D - k_D)x_2 \\ (e_R a_R x_1 - d_R)x_3 + k_D x_2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

En vista de que el desgaste del bienestar social por parte de los grupos de presión de los partidos D y E son $a_D x_2$ y $a_R x_3$ respectivamente, el límite de discontinuidad es el conjunto $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3, t) : H_1(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ con $H_1(x_1, x_2, x_3) = a_D x_2 - a_R x_3$.

5 ANÁLISIS DEL SISTEMA DE PREDADOR PRESA

En este capítulo se ilustrará el método SPT en la continuación de bifurcaciones no suaves locales y globales utilizando el modelo depredador-presa propuesto en [1].

Este modelo representa la dinámica de dos poblaciones de individuos, un depredador y una presa con densidades x_1 y x_2 , que comparten un mismo hábitat. Con el fin de proteger la población de depredadores, el depredador solo puede ser explotado cuando su densidad supera un valor α determinado.

La configuración (f_1, f_2, H) del sistema es presentada en la ecuación (5.1) donde α es el parámetro de bifurcación y k_1, k_2, k_3 y k_4 son los parámetros del sistema que se han asumido constantes.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{pmatrix} x_1(1 - x_1) - \frac{k_1 x_1}{k_2 + x_1} x_2 \\ \frac{k_1 x_1}{k_2 + x_1} x_2 - k_3 x_2 \end{pmatrix} \\ f_2(x) &= \begin{pmatrix} x_1(1 - x_1) - \frac{k_1 x_1}{k_2 + x_1} x_2 \\ \frac{k_1 x_1}{k_2 + x_1} x_2 - k_3 x_2 - k_4 x_2 \end{pmatrix} \\ H(x, \alpha) &= x_2 - \alpha = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Los parámetros k_i se han fijado en los valores propuestos en [1] como se presentan en la ecuación (5.2).

$$\begin{cases} k_1 = 0.3556 & k_2 = 0.33 \\ k_3 = 0.0444 & k_4 = 0.2067 \end{cases} \tag{5.2}$$

Las densidades de los individuos deben ser positivas, $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$. En los retratos de fase la densidad de la presa es variada en el rango $0 < x_1 < 1$, mientras que la densidad del depredador es considerada desde 0 hasta un valor un poco mayor que α . El parámetro de bifurcación α está asociado al límite de discontinuidad $\Sigma = \{x: x_2 = \alpha\}$ y α es variado en el rango $[0.25, 3]$.

Primero, se analizará el sistema para diferentes valores de α con el método SPT. Luego se aplicarán las técnicas de continuación para bifurcaciones no suaves locales y globales basadas en el método SPT.

Para valores de α mayores a 3, el LD del sistema depredador–presa tiene la secuencia de puntos presentada en la ecuación (5.3). Se detectan dos puntos singulares: $\Omega_{SST_{12}}^l = (0.047; \alpha)$ y $\Omega_{SST_{12}}^l = (0.793; \alpha)$. Los puntos singulares están en las transiciones de dos cambios de cruce a deslizamiento estable.

$$S_1 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^l}_{x_1=0.047} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^l}_{x_1=0.793} \rightarrow \Omega_{C_{12}} \quad (5.3)$$

En la Figura 5.1, se presenta el retrato de fase x_1 vs. x_2 del sistema para $\alpha = 2.75$. En la zona Z_1 , el campo vectorial f_1 tiene un foco estable F_0 y un ciclo límite estándar C_1 representado por la ecuación (5.4). La dirección del segmento deslizante Φ_s^- está asociada a la dirección del flujo en el ciclo C_1 y el punto tangente $\Omega_{SST_{12}}^l$ está alineado con el foco F_0 .

$$C_1 = \Phi_1 / \odot \quad (5.4)$$

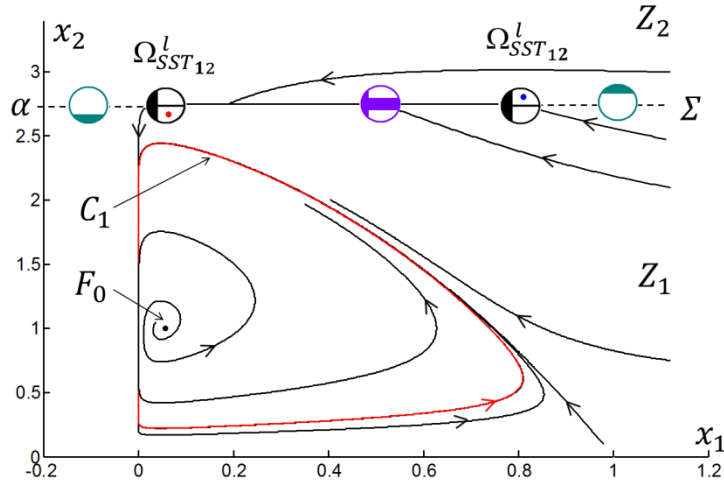


Figura 5.1. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 2.75$.

Cuando α disminuye, la frontera de discontinuidad se vuelve más cercana al ciclo estándar C_1 . Para $\alpha \approx 2.44$ (Figura 5.2) el ciclo estándar choca con el LD en el punto tangente $\Omega_{SST_{12}}^l$, produciendo una bifurcación global grazing (GB). El ciclo grazing resultante C_2 está dado por la ecuación (5.5). La secuencia de puntos sobre el LD sigue siendo la misma.

$$C_2 = \Phi_1 / \Omega_s^{(+)} \oslash \quad (5.5)$$

La bifurcación grazing no es detectada con el análisis del LD, sin embargo la información del LD puede usarse para reducir el tiempo computacional en la detección de la bifurcación global. Usando el punto tangente Ω_{SST12}^l como condición inicial se integra el campo vectorial f_1 y se puede verificar la existencia del ciclo C_2 fácilmente.

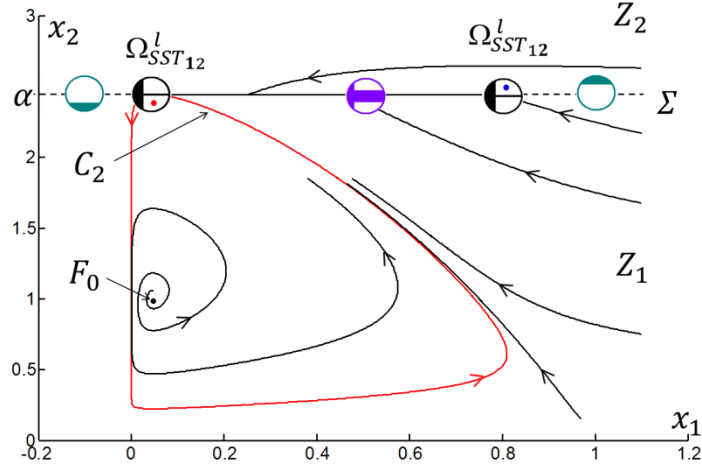


Figura 5.2. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 2.44$.

Cuando $\alpha < 2.44$, después de que la bifurcación grazing se ha presentado, la solución periódica se convierte en un ciclo deslizando C_3 representado por la ecuación (5.6). En la Figura 5.3 se presenta el retrato de fase para $\alpha = 1.625$. La solución tiene entonces una transición de un ciclo estándar a un ciclo grazing y de un ciclo grazing a un ciclo deslizando. La secuencia de puntos en el LD es igual a la secuencia dada en la ecuación (5.3).

$$C_3 = \Phi_1 / \Omega_s^{(\sim)} / \Phi_s^{\leftarrow} / \Omega_s^{(+)} \oslash \quad (5.6)$$

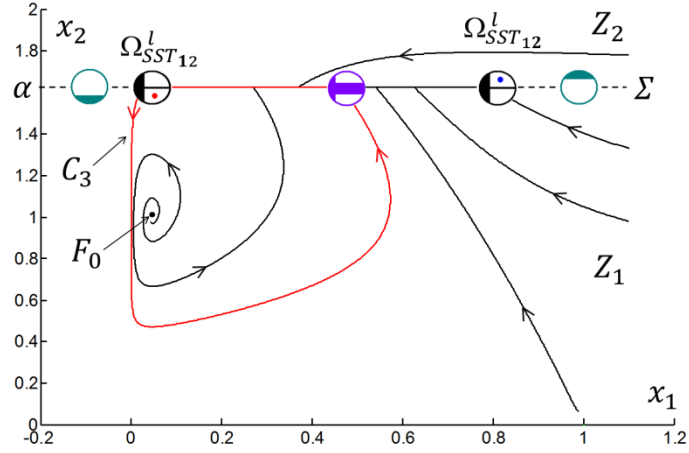


Figura 5.3. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.625$.

Cuando el parámetro llega a $\alpha \approx 1.2437$ (Figura 5.4) aparece un punto pseudo equilibrio $\Omega_{SSAc_{12}}^n$ en $x = (0.3584, 1.2437)$, presentándose una bifurcación local pseudo-saddle-node (PSN). El ciclo deslizante C_3 de la ecuación (5.6) sigue presente en la dinámica. En la ecuación (5.7) se presenta la secuencia de puntos en el LD para este valor del parámetro.

$$S_2 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST12}^l}_{x_1=0.047} \rightarrow \Phi_{SS12}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAc_{12}}^n}_{x_1=0.3584} \rightarrow \Phi_{SS12}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST12}^l}_{x_1=0.793} \rightarrow \Omega_{C_{12}} \quad (5.7)$$

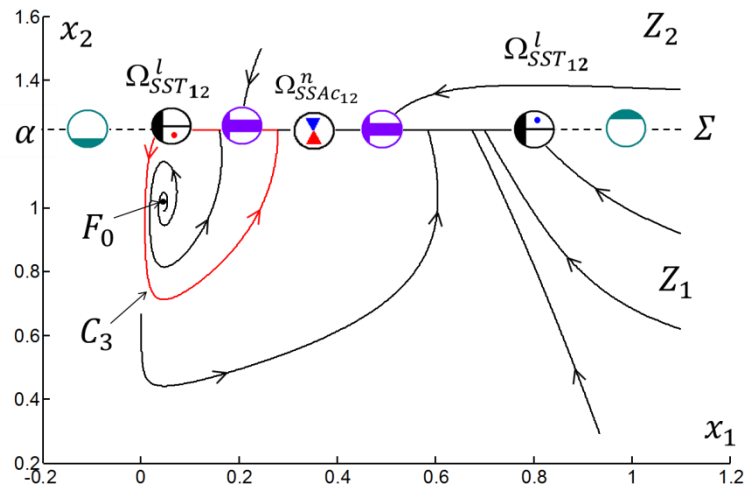


Figura 5.4. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.2437$.

Reduciendo un poco más el valor de α , el punto $\Omega_{SSAc_{12}}^n$ se convierte en dos puntos $\Omega_{SSAc_{12}}^n$. En la ecuación (5.8) se presenta la secuencia de puntos en el LD y en la Figura 5.5 el retrato de fase para $\alpha = 1.2375$. Entre los dos puntos $\Omega_{SSAc_{12}}^n$ aparece un segmento deslizante $\Phi_{\vec{s}}$ y se presentan dos cambios de dirección en el LD. Nuevamente, el ciclo deslizante C_3 de la ecuación (5.6) sigue presente en el sistema.

$$S_3 = \dots \Phi_{SS_{12}}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAc_{12}}^n}_{x_1=0.2532} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^r \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAc_{12}}^n}_{x_1=0.3813} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^l \dots \quad (5.8)$$

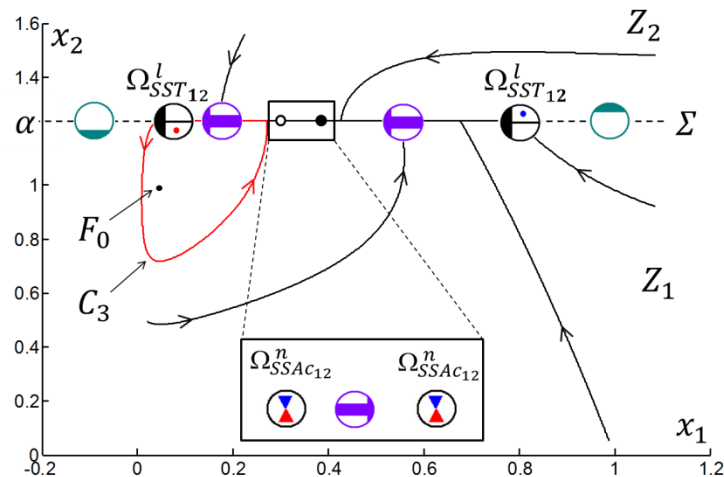


Figura 5.5. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.2375$.

Quando disminuye α , se forma una órbita deslizante homoclínica C_4 en $\alpha \approx 1.2277$ (Figura 5.6). Esta órbita comienza en el pseudo equilibrio $\Omega_{SSAc_{12}}^n$ y vuelve nuevamente a él. Se presenta por tanto una bifurcación global pseudo-homoclínica (PHB) la cual se puede detectar utilizando el método SPT.

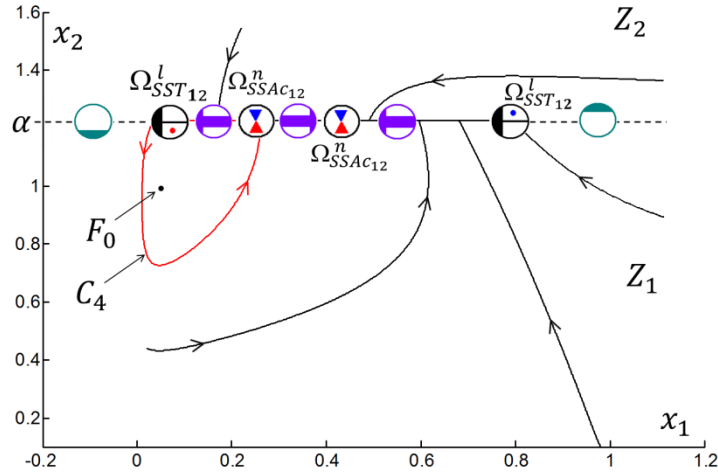


Figura 5.6. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.2277$.

Al reducir nuevamente el parámetro α , tanto la órbita deslizante homoclínica C_4 como el ciclo deslizante C_3 desaparecen. La secuencia de puntos es la misma de la ecuación (5.8) pero los puntos pseudo equilibrio se vuelven más cercanos a los puntos tangentes como se muestra en la ecuación (5.9) para $\alpha = 1.175$.

$$S_4 = \dots \Phi_{SS_{12}}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAC_{12}}^n}_{x_1=0.1792} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^r \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAC_{12}}^n}_{x_1=0.4912} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^l \dots \quad (5.9)$$

El retrato de fase para $\alpha = 1.175$ se presenta en la Figura 5.7. Se puede observar que la frontera de discontinuidad se vuelve más cercana al foco inestable F_0 . Este hecho se refleja en el LD con la proximidad de los puntos $\Omega_{SST_{12}}^l$ y $\Omega_{SSAC_{12}}^n$.

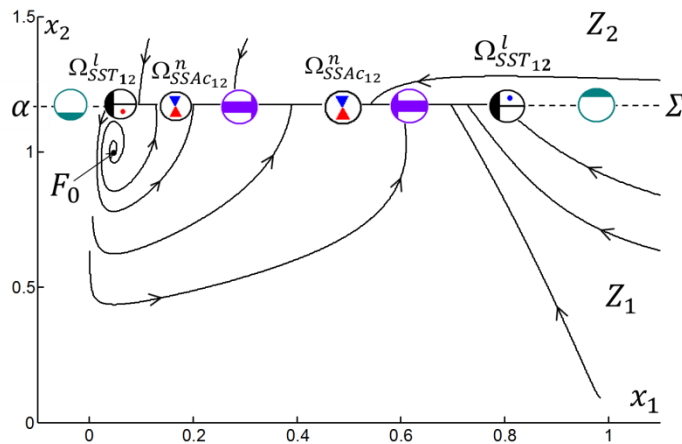


Figura 5.7. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.175$.

Cuando $\alpha \approx 1.03$ (Figura 5.8) se puede detectar una segunda bifurcación global homoclínica. La órbita homoclínica C_4 es muy pequeña a causa de la extrema proximidad de los puntos $\Omega_{SST_{12}}^l$ y $\Omega_{SSAc_{12}}^n$. La ubicación de esos puntos se presenta en la ecuación (5.10).

$$S_5 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^l}_{x_1=0.047} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAc_{12}}^n}_{x_1=0.0594} \dots \quad (5.10)$$

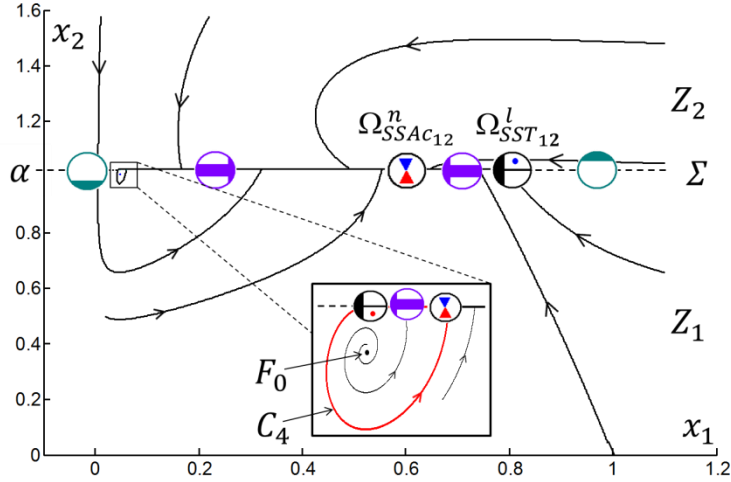


Figura 5.8. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.03$.

Al reducir α , la órbita homoclínica desaparece y se genera nuevamente el ciclo deslizante C_3 pero con un tamaño muy pequeño. En la Figura 5.9 se presenta el retrato de fase del sistema para $\alpha = 1.02$.

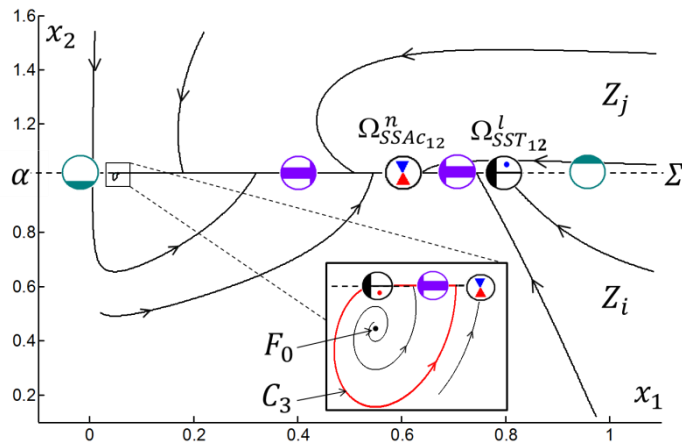


Figura 5.9. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 1.02$.

En $\alpha \approx 1.01017$ (Figura 5.10) la frontera de discontinuidad choca con el foco inestable dando lugar a una bifurcación local Boundary-Focus (BF) y conduciendo a la desaparición del foco F_0 y del ciclo deslizante C_3 . A causa de la bifurcación BF el punto tangente $\Omega_{SST_{12}}^l$ se convierte en un punto del tipo $\Omega_{SVAc_{12}}^n$ y la secuencia de puntos en el LD es diferente. En la ecuación (5.11) se presenta la nueva configuración de puntos después de la bifurcación.

$$S_6 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SVAc_{12}}^n}_{x_1=0.047095} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^r \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAc_{12}}^n}_{x_1=0.6235} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^l}_{x_1=0.7929} \rightarrow \Omega_{C_{12}} \quad (5.11)$$

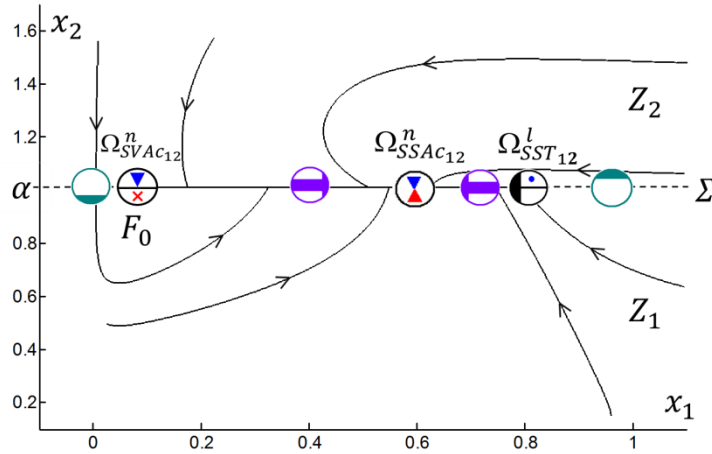


Figura 5.10. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 1.01017$.

En la Figura 5.11 se presenta el retrato de fase para $\alpha = 0.9$. Al igual que en el caso anterior solo se conserva un punto pseudo-equilibrio en el LD. El punto $\Omega_{SVAc_{12}}^n$ ahora se transforma en un punto tangente $\Omega_{SST_{12}}^r$ con dirección contraria a la anterior y el punto $\Omega_{SSAc_{12}}^n$ se vuelve más cercano al punto tangente $\Omega_{SST_{12}}^l$. La nueva secuencia de puntos se muestra en la ecuación (5.12)

$$S_7 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^r}_{x_1=0.047095} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^r \rightarrow \underbrace{\Omega_{SSAc_{12}}^n}_{x_1=0.6846} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^l \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^l}_{x_1=0.7929} \rightarrow \Omega_{C_{12}} \quad (5.12)$$

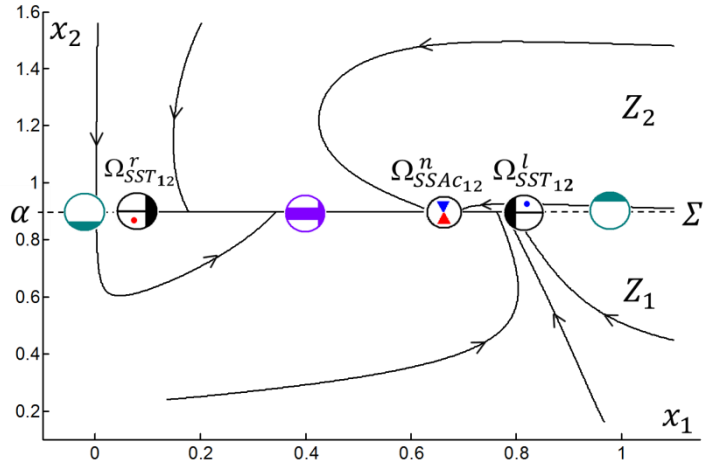


Figura 5.11. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 0.9$.

En $\alpha \approx 0.6527$ (Figura 5.12) el punto pseudo-equilibrio Ω_{SSAC12}^n choca con el punto tangente Ω_{SST12}^l en una bifurcación local Boundary Node (BN), convirtiéndose en un punto del tipo Ω_{SACV12}^r , como se muestra en la secuencia de la ecuación (5.13).

$$S_8 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST12}^r}_{x_1=0.047095} \rightarrow \Phi_{SS12}^r \rightarrow \underbrace{\Omega_{SACV12}^r}_{x_1=0.7929} \rightarrow \Omega_{C_{12}} \quad (5.13)$$

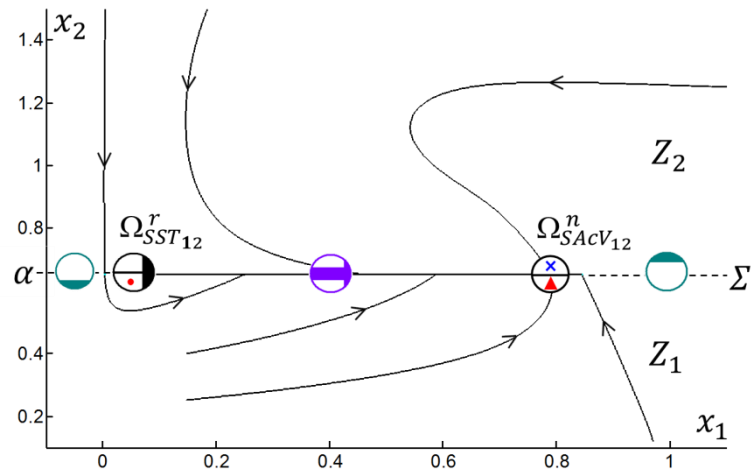


Figura 5.12. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha \approx 0.6527$.

Para $\alpha < 0.6527$ aparece un nodo estable N_0 en el campo vectorial f_2 . El sistema tiene la secuencia de puntos mostrada en la ecuación (5.14). Note que la secuencia es similar a la secuencia para $\alpha > 1.625$ presentada en la ecuación (5.3) pero ahora el movimiento deslizante es en la dirección contraria Φ_s^{\rightarrow} . En la Figura 5.13 presentamos el retrato de fase para $\alpha = 0.5$.

$$S_9 = \Omega_{C_{21}} \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^r}_{x_1=0.047095} \rightarrow \Phi_{SS_{12}}^r \rightarrow \underbrace{\Omega_{SST_{12}}^r}_{x_1=0.7929} \rightarrow \Omega_{C_{12}} \quad (5.14)$$

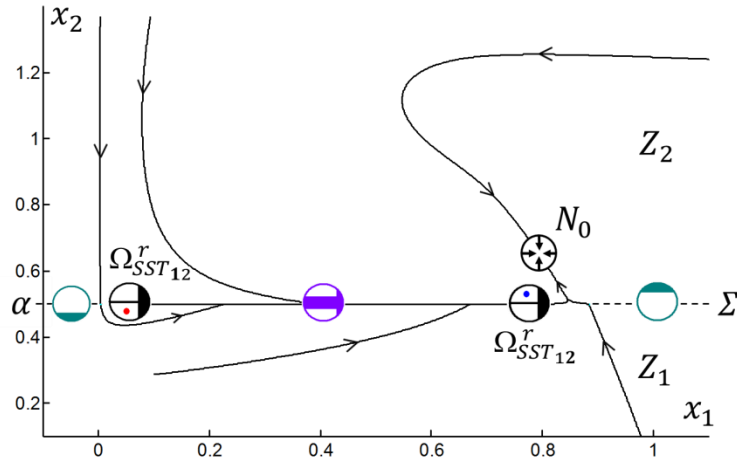


Figura 5.13. Retrato de fase del sistema depredador presa para $\alpha = 0.5$.

En la Figura 5.14, se presenta el diagrama de bifurcación del sistema depredador-presa cuando α es variado en el rango $[0.25, 3]$. Este diagrama resume los cambios en las secuencias de segmentos regulares y puntos especiales aislados sobre el límite de discontinuidad originados por las bifurcaciones locales.

Las bifurcaciones globales, a su vez, produjeron cambios en las secuencias de segmentos y puntos aislados en las regiones suaves y en los límites de discontinuidad pertenecientes a órbitas periódicas. De manera que, las bifurcaciones no suaves locales y globales pueden ser identificadas utilizando el método SPT.

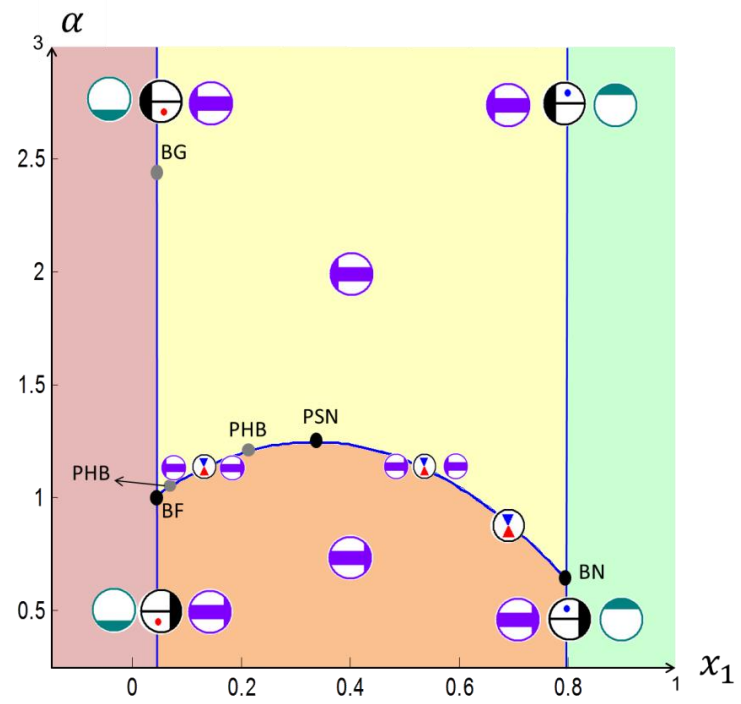


Figura 5.14. Diagrama de bifurcación para el sistema depredador-presa

6 OSCILADOR ROTATIVO

En este capítulo se analizará una versión ampliada del modelo presentado en [17] y [18], el cual presenta múltiples límites de discontinuidad debido a la forma de las levas y al contacto de fricción.

El oscilador a analizar está constituido por un disco principal rotativo que consta de dos levas (leva 1 y leva 2) y que está sujeto a un torque elástico, con coeficiente de restitución k_r y coeficiente de fricción viscosa c , que intenta desplazar el disco a su posición original. El disco principal está en contacto con dos discos auxiliares (disco 1 y disco 2) que giran a velocidad constante ω_i . Cada leva i tiene contacto con uno de los discos auxiliares a través de una longitud α (para la leva 1 y el disco 1) o β (para la leva 2 y el disco 2), ejerciendo el disco auxiliar una fuerza normal N_i sobre la leva. Los ángulos ϕ_i y φ_i indican la fase de la leva i y el disco i respectivamente con respecto al ángulo de referencia $\theta = 0$. El sistema se muestra en la Figura 6.1.

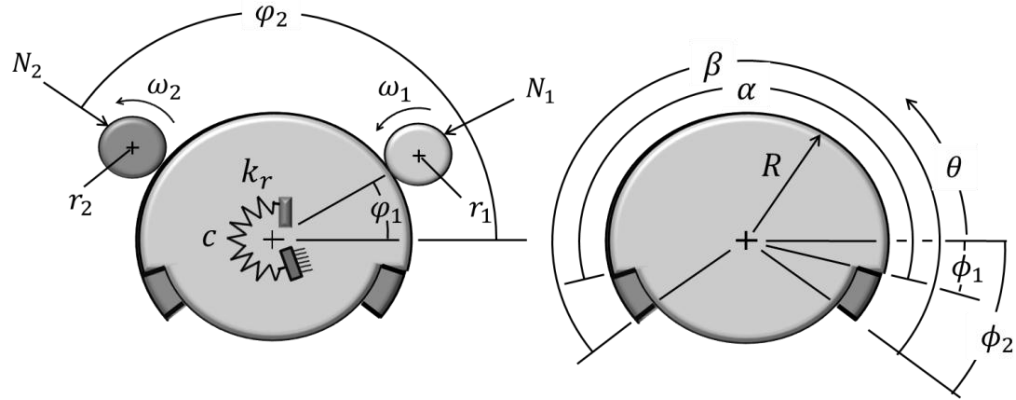


Figura 6.1. Oscilador rotativo

El sistema se describe mediante la ecuación (6.1), donde J es el momento de inercia del disco principal, T es el torque de fricción que depende de la velocidad del disco y f es una función de las variables de estado.

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k_r \theta = f\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) + T\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \quad (6.1)$$

La función $f\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right)$ (ecuación (6.2)) mantiene una entrada de energía al sistema, de forma que los ciclos límite de éste dependen de la amplitud A de f .

$$f\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) = A \sqrt{\theta^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \sin\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \quad (6.2)$$

Tomando $\tau = \omega t$ donde $\omega = \sqrt{k_r/J}$ es la frecuencia natural del sistema y $\zeta = c/\sqrt{Jk_r}$ es el coeficiente de amortiguamiento del sistema, se obtiene el modelo adimensional de la ecuación (6.3).

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \zeta \frac{d\theta}{d\tau} + \theta = \frac{1}{k_r} f\left(\theta, \omega \frac{d\theta}{d\tau}\right) + \frac{1}{k_r} T\left(\omega \frac{d\theta}{d\tau}\right) \quad (6.3)$$

El torque de fricción T es la suma de los torques T_i producidos por cada uno de los discos auxiliares según la ley de fricción de Conti [17] como se describe en las ecuaciones (6.4) - (6.7), con v_{ri} la velocidad relativa entre la leva i y el disco i , R el radio del disco y U_i el coeficiente de fricción, en el cual μ_{si} y μ_{ki} son los coeficientes de fricción estático y dinámico respectivamente y p_i es un coeficiente que mide la pendiente de la fuerza de fricción causada por el disco i .

$$T(\dot{\theta}) = \sum_i T_i(\dot{\theta}) \text{sgn}(v_{ri}(\dot{\theta})) \quad (6.4)$$

$$v_{ri}(\dot{\theta}) = r_i \omega_i - R \dot{\theta} \quad (6.5)$$

$$T_i(\dot{\theta}) = R N_i U_i(\dot{\theta}) \quad (6.6)$$

$$U_i(\dot{\theta}) = \frac{\mu_{si} - \mu_{ki}}{1 + p_i |v_{ri}(\dot{\theta})|} + \mu_{ki} \quad (6.7)$$

Cada fuerza de fricción T_i está presente en el sistema solo cuando existe contacto entre la leva i y el disco i , de modo que dependiendo del número de discos que están en contacto con las levas, habrá campos vectoriales diferentes. Además,

como se puede observar en la ecuación (6.4), el torque de fricción T toma valores distintos cuando la velocidad relativa es positiva y cuando es negativa, generando así nuevos campos vectoriales. En total el sistema tiene nueve campos vectoriales.

Tomando el vector de estado $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ con $x_1 = \theta$ y $x_2 = d\theta/d\tau$, el sistema está definido por el conjunto de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}} = f_j(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} en cada región Z_j según la ecuación (6.8).

$$f_j(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \zeta x_2 + \frac{f(x_1, \omega x_2)}{k_r} + \frac{g_j(\omega x_2)}{k_r} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

El primer campo vectorial f_1 se da en el caso en que no existe contacto entre los discos y las levas. La función g_1 está representada por la ecuación (6.9).

$$g_1(x) = 0 \quad (6.9)$$

Los siguientes cuatro campos vectoriales $f_2 - f_5$ corresponden al caso en el cual los dos discos auxiliares están en contacto con sus respectivas levas y se diferencian por el signo de las velocidades relativas. Las funciones $g_2 - g_5$ están descritas por las ecuaciones (6.10)-(6.13).

$$g_2(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad (6.10)$$

$$g_3(x) = -T_1(x) + T_2(x) \quad (6.11)$$

$$g_4(x) = T_1(x) - T_2(x) \quad (6.12)$$

$$g_5(x) = -T_1(x) - T_2(x) \quad (6.13)$$

Los campos vectoriales f_6 y f_7 están caracterizados por g_6 y g_7 en las ecuaciones (6.14)-(6.15) y se presentan cuando solo existe contacto entre el disco 1 y la leva 1.

$$g_6(x) = T_1(x) \quad (6.14)$$

$$g_7(x) = -T_1(x) \quad (6.15)$$

Finalmente, los campos vectoriales f_8 y f_9 están determinados por g_8 y g_9 en las ecuaciones (6.16)-(6.17) y se presentan cuando solo existe contacto entre el disco 2 y la leva 2.

$$g_8(x) = T_2(x) \quad (6.16)$$

$$g_9(x) = -T_2(x) \quad (6.17)$$

Las funciones $h_i(\theta, \mathbf{q})$ (ecuaciones (6.18) y (6.19)) dependientes del ángulo θ y del vector de parámetros $\mathbf{q} = (\alpha, \beta, \phi, \varphi)$, determinan si hay contacto entre la leva i y el disco auxiliar i , dando como resultado 1 si hay contacto y 0 en caso contrario.

$$h_1(\theta, \mathbf{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_1 + \varphi_1 < \theta < \alpha + \phi_1 + \varphi_1 \\ 0 & \text{si } \theta > \alpha + \phi_1 + \varphi_1 \end{cases} \quad (6.18)$$

$$h_2(\theta, \mathbf{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_2 + \varphi_2 < \theta < \beta + \phi_2 + \varphi_2 \\ 0 & \text{si } \theta > \beta + \phi_2 + \varphi_2 \end{cases} \quad (6.19)$$

De acuerdo a lo anterior, las nueve regiones suaves para el sistema son las siguientes:

$$Z_1 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 0 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 0\} \quad (6.20)$$

$$Z_2 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge v_{r1} > 0 \wedge v_{r2} > 0\} \quad (6.21)$$

$$Z_3 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge v_{r1} < 0 \wedge v_{r2} > 0\} \quad (6.22)$$

$$Z_4 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge v_{r1} > 0 \wedge v_{r2} < 0\} \quad (6.23)$$

$$Z_5 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge v_{r1} < 0 \wedge v_{r2} < 0\} \quad (6.24)$$

$$Z_6 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 0 \wedge v_{r1} > 0\} \quad (6.25)$$

$$Z_7 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 0 \wedge v_{r1} < 0\} \quad (6.26)$$

$$Z_8 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 0 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge v_{r2} > 0\} \quad (6.27)$$

$$Z_9 = \{x \in \mathbb{R}^2: h_1(\theta, \mathbf{q}) = 0 \wedge h_2(\theta, \mathbf{q}) = 1 \wedge v_{r2} < 0\} \quad (6.28)$$

Cuando $\alpha = \beta = 360$, los dos discos auxiliares siempre estarán en contacto con el disco principal y de acuerdo a los valores de x_2 en los cuales $v_{ri} = 0$, se presenta

alguna de las estructuras de campos vectoriales que se presentan en la Figura 6.2.

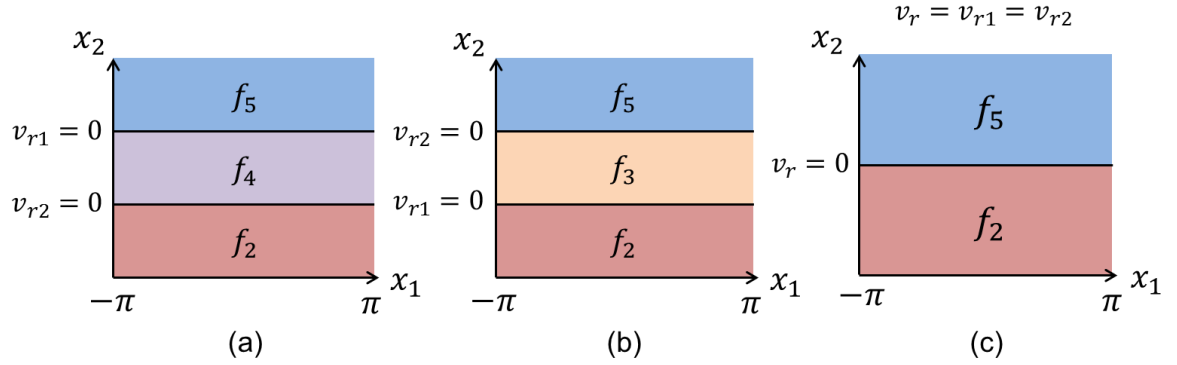


Figura 6.2. Distribución de los campos vectoriales de acuerdo a los valores de x_2 en que $v_{ri} = 0$.

Para los demás valores de α y β , de acuerdo al valor de los parámetros es posible obtener una división del espacio de estados en entre 3 y 8 campos vectoriales. En la Figura 6.3 se muestran algunas de las configuraciones posibles.

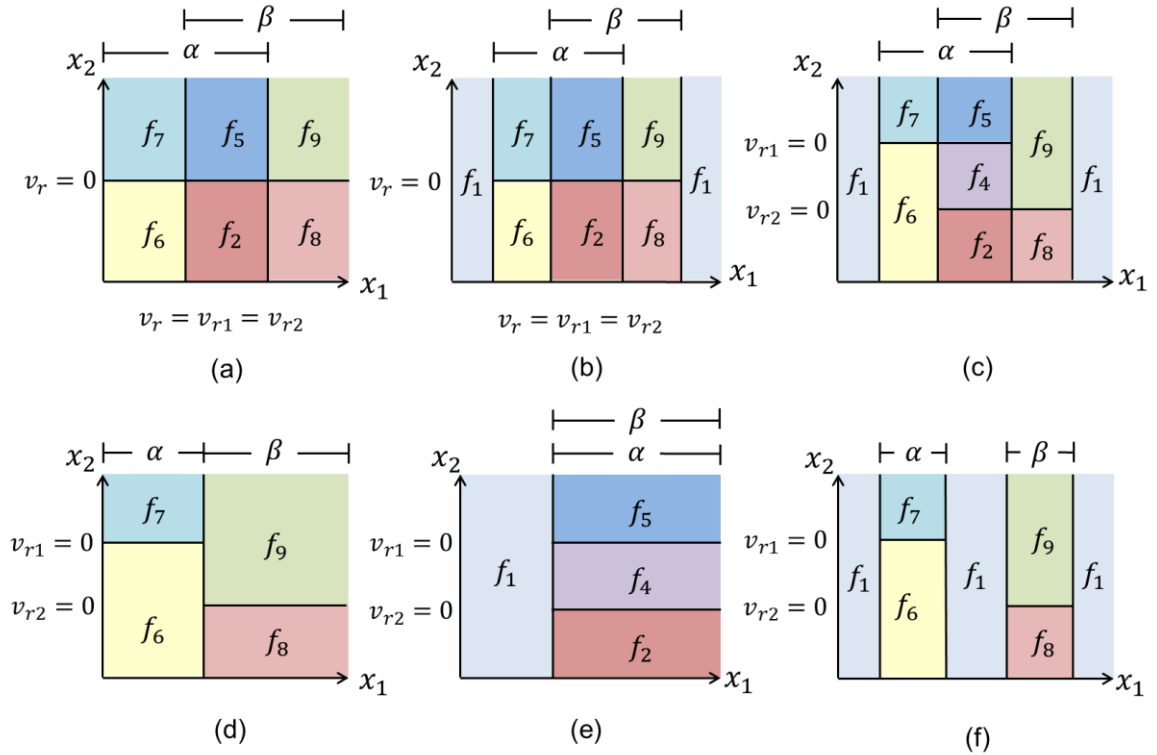


Figura 6.3. Distribución de los campos vectoriales de acuerdo a los valores de los parámetros

Para ilustrar la complejidad dinámica de un sistema mecánico relativamente simple, se presenta el ejemplo del oscilador rotacional con las siguientes características: $\alpha = 171.8871$ grados (3.0 rad), $\beta = 171.8871^\circ$ (3.0 rad), $\phi_1 = 302.7043^\circ$ (5.2831 rad), $\phi_2 = 246.00^\circ$ (4.2935 rad), $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\omega_1 = 15$ rpm (1.5708 rad/s) $\omega_2 = -21$ rpm (-2.1991 rad/s), $J = 2.62$ kgm², $k_r = 2.62$ Nm/rad, $C = 0.02088$ Nms/rad la, $N_i = 49$ N, $R = 0,12$ m y $r_i = 0,12$ m . $\mu_{si} = 0.65$, $\mu_{ki} = 0.35$ y $p_i = 15$ son los coeficientes para calcular el coeficiente de fricción U_i .

Con las anteriores condiciones el diagrama de fase se divide en 8 campos vectoriales como en el caso de la Figura 6.3c y como se presenta en la Figura 6.4.

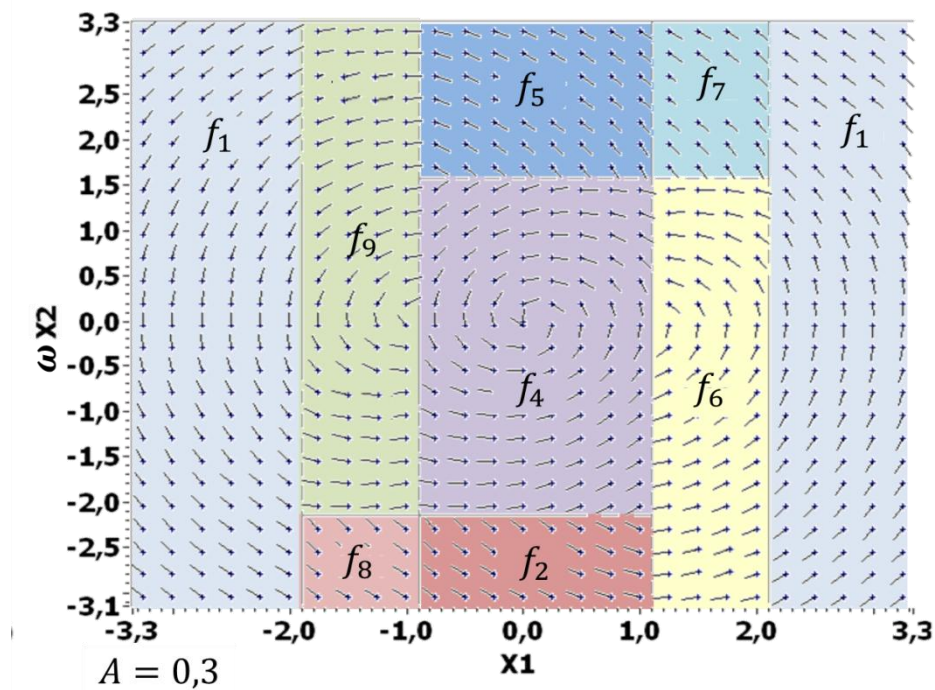


Figura 6.4. Distribución de campos vectoriales con $A = 0.3$

El método SPT brinda una primera aproximación para determinar los valores de los parámetros en los cuales se presentan bifurcaciones, lo cual por métodos de fuerza bruta es bastante costoso computacionalmente en sistemas complejos. Los mapas de la Figura 6.6 que muestran los diferentes tipos de puntos sobre cada límite de discontinuidad ($v_{r1} = 0$ en la Figura 6.6a y $v_{r2} = 0$ en la Figura 6.6b) con respecto al parámetro A , de acuerdo al mapa de colores de la Figura 6.5, permiten inferir donde iniciar la búsqueda de bifurcaciones.

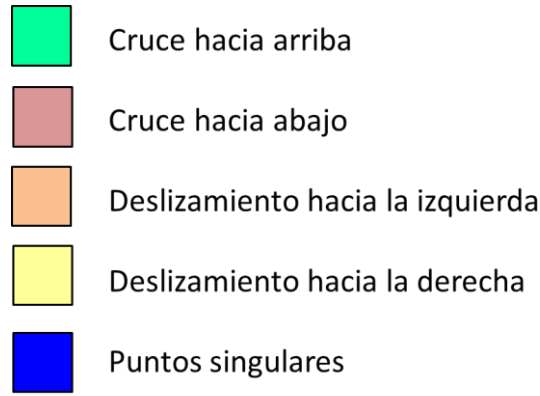


Figura 6.5. Colores asociados con las dinámicas en los límites de discontinuidad

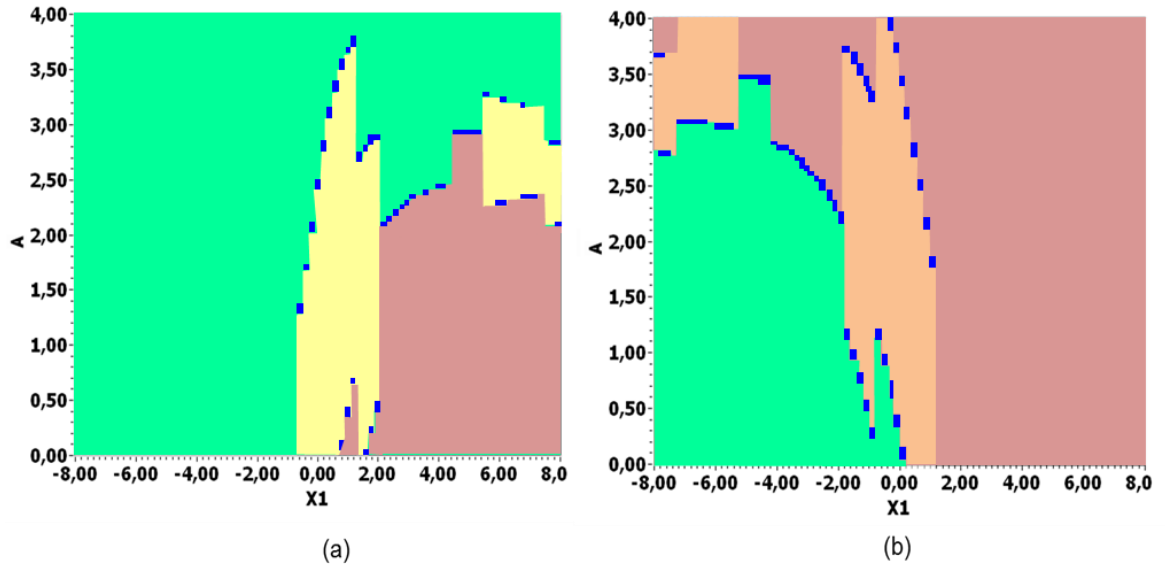


Figura 6.6. Diagrama de bifurcaciones para (a) $\omega = 1.5708$ ($v_{r1} = 0$) y (b) $\omega = -2.1991$ ($v_{r2} = 0$)

6.1 Bifurcaciones sobre los límites de discontinuidad $\Sigma_{4,5}$ y $\Sigma_{2,4}$

Para valores de A inferiores a -0.299 se presentan ciclos límite estándar cuyo tamaño depende del parámetro A . El procedimiento del método SPT para la detección de bifurcaciones globales es el siguiente: Se comienza el proceso de integración mientras se detecta la secuencia y tipo de elementos que presenta la órbita. Esta secuencia se compara con los patrones de las bifurcaciones grazing, switching y crossing. El valor de A se incrementa hasta que se detecte algún cambio en la secuencia que lleve a una bifurcación.

En la Figura 6.7 se presentan los retratos de fase para las bifurcaciones grazing, switching y crossing en los límites de discontinuidad $\Sigma_{4,5}$ y $\Sigma_{2,4}$.

En la Tabla 6.1 se presentan los valores de A en los cuales se presentan las bifurcaciones para cada límite de discontinuidad. En el límite de discontinuidad $\Sigma_{8,9}$ en $A = 2.5$ todavía no se ha presentado la bifurcación crossing y para valores superiores ya no existen ciclos límites.

Tabla 6.1. Valores de A en los que se presentan bifurcaciones en cada límite de discontinuidad

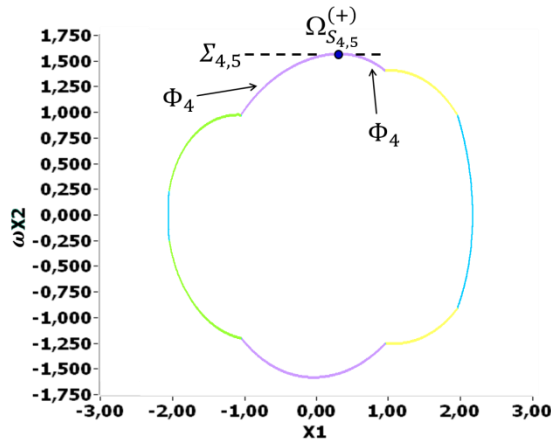
Límite de discontinuidad	$\Sigma_{4,5}$	$\Sigma_{6,7}$	$\Sigma_{8,9}$	$\Sigma_{2,4}$
Bifurcación grazing	-0.299	0.1	0.1	0
Bifurcación switching	-0.15	0.328	0.72	0.355
Bifurcación crossing	0.62	1.42		1.63

Finalmente, en la Tabla 6.2 se presentan las secuencias de los ciclos para los valores de A en que se presentan las bifurcaciones detectadas sobre el límite de discontinuidad $\Sigma_{4,5}$.

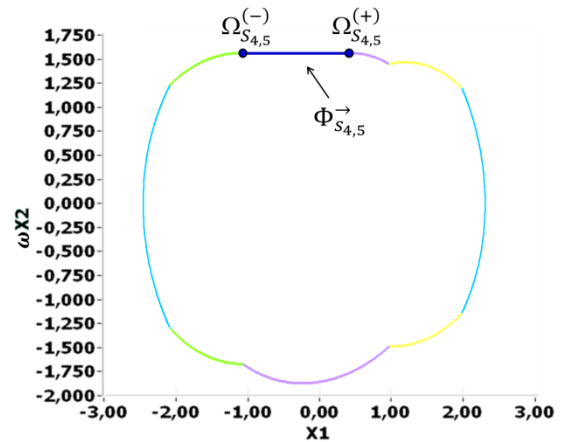
Mediante el análisis del oscilador rotativo se comprueba que el método SPT es útil para analizar sistemas no suaves complejos con dinámicas deslizantes y que permite la detección de los puntos iniciales de los ciclos y de los cambios en las secuencias de ciclos y por consiguiente la detección de bifurcaciones no suaves deslizantes.

Tabla 6.2. Secuencias de los ciclos para los valores críticos de A en el límite de discontinuidad $\Sigma_{4,5}$

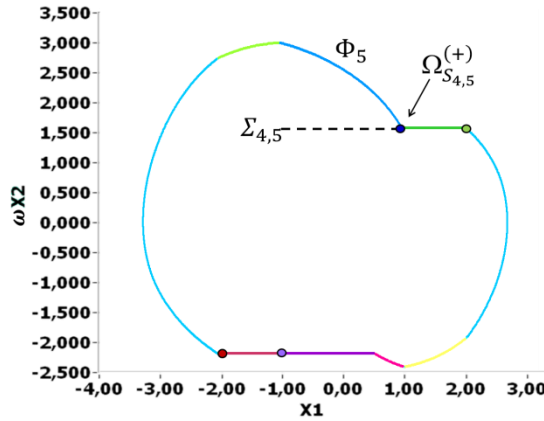
A	Secuencia del ciclo
-0.299	$\Phi_4/\Omega_{S_{4,5}}^{(+)}/\Phi_4/\Omega_{C_{4,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,1}}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,4}}/\Phi_4/\Omega_{C_{4,9}}/\Phi_9/\Omega_{C_{9,1}}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,9}}/\Phi_9/\Omega_{C_{9,4}}/\mathcal{C}$
-0.15	$\Omega_{S_{4,5}}^{(-)}/\Omega_{S_{4,5}}^{\rightarrow}/\Omega_{S_{4,5}}^{(+)}/\Phi_4/\Omega_{C_{4,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,1}}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,4}}/\Phi_4/\Omega_{C_{4,9}}/\Phi_9/\Omega_{C_{9,1}}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,9}}/\Phi_9/\mathcal{C}$
0.62	$\Phi_5/\Omega_{S_{4,5}}^{(+)}/\Phi_{S_{6,7}}^{\rightarrow}/\Omega_{S_{6,7}}^{(+)}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,2}}/\Phi_2/\Omega_{S_{2,4}}^{(\sim)}/\Phi_{S_{2,4}}^{\leftarrow}/\Omega_{S_{2,4}}^{(+)}/\Phi_{S_{8,9}}^{\leftarrow}/\Omega_{S_{8,9}}^{(+)}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,9}}/\Phi_9/\Omega_{C_{9,5}}/\mathcal{C}$



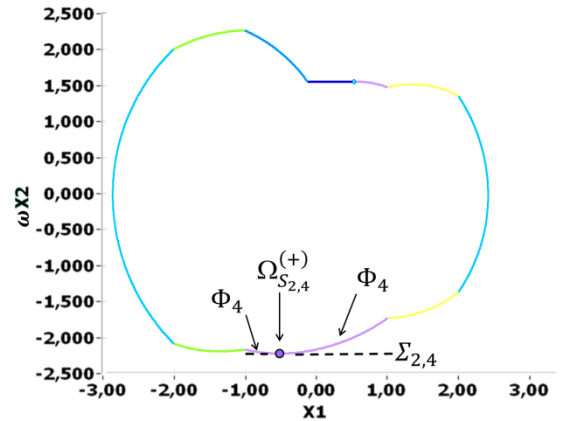
(a)



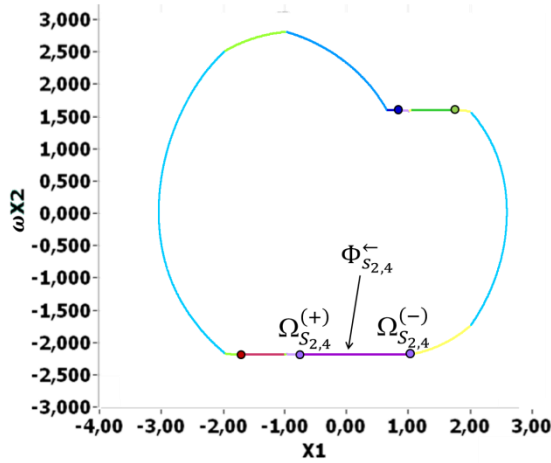
(b)



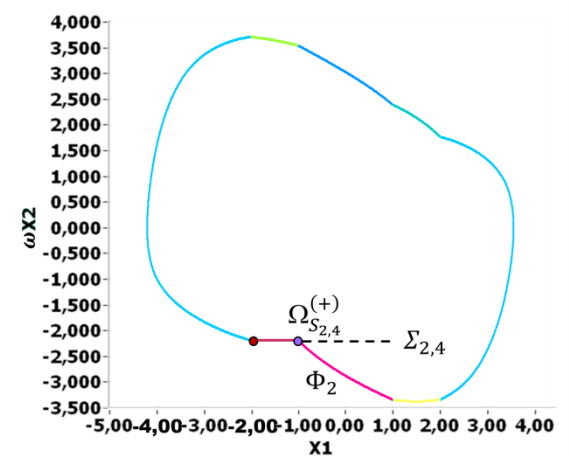
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.7. Bifurcaciones en $\Sigma_{4,5}$ y $\Sigma_{2,4}$. (a) Bifurcación grazing en $A = -0.299$, (b) Bifurcación switching en $A = -0.15$, (c) Bifurcación crossing en $A = 0.62$, (d) Bifurcación grazing en $A = 0$, (e) Bifurcación switching en $A = 0.35$, (f) Bifurcación crossing en $A = 1.63$

7 OSCILADOR DE FRICCIÓN DE DOBLE BANDA

En este capítulo se analizará el oscilador de fricción de doble banda que fue propuesto en [18] con algunas modificaciones con el fin de lograr escenarios ricos en bifurcaciones. El sistema consiste en un cilindro horizontal de masa m conectado mediante un resorte con coeficiente de restitución k y un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento c a un soporte fijo. El cilindro se desliza entre dos barras con fricción despreciable. La distancia recorrida por el cilindro entre las barras se denotará por x . Dos bandas transportadoras en la parte inferior y superior del cilindro con velocidades lineales v_1 y v_2 respectivamente pueden ejercer fuerzas de fricción causadas por fuerzas normales N_1 y N_2 al deslizarse el cilindro sobre ellas. Las bandas transportadoras están caracterizadas por sus posiciones mediante los parámetros $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 . El modelo del sistema se muestra en la Figura 7.1.

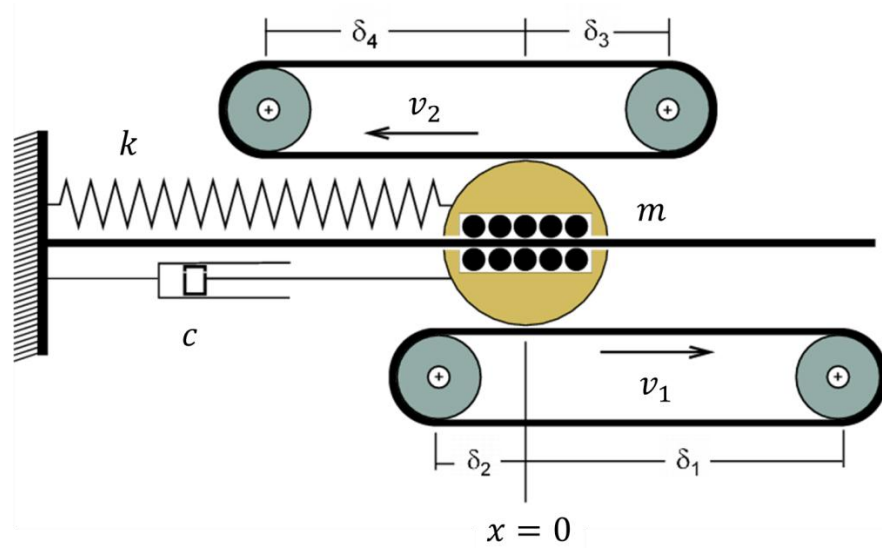


Figura 7.1. Oscilador de fricción de doble banda

El sistema se describe mediante la ecuación (7.1), en la cual f es una función de las variables de estado y F_f son las fuerzas de fricción que dependen del cilindro.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + F_f\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (7.1)$$

La función f describe una fuerza externa que permite remplazar la energía perdida por los efectos de la fricción en el sistema. El valor A es la amplitud de la fuerza de entrada y determina la pérdida de balance en el sistema y por consiguiente sus cambios topológicos.

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = A \sin\left(\frac{dx/dt}{\sqrt{x^2 + (dx/dt)^2}}\right) \quad (7.2)$$

Tomando $\tau = \omega t$ donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema y $\zeta = c/2\sqrt{km}$ es el coeficiente de amortiguamiento del sistema, se obtiene el modelo adimensional de la ecuación (7.3),

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{1}{k} f\left(x, \omega \frac{dx}{d\tau}\right) + \frac{1}{k} F_f\left(\omega \frac{dx}{d\tau}\right) \quad (7.3)$$

La fuerza F_f es la suma de las fuerzas de fricción F_i producidas por cada una de las bandas transportadoras definidas mediante la ley de fricción de Conti [17] como se describe en las ecuaciones (7.4)-(7.7), en las cuales v_{r1} es la velocidad relativa entre el cilindro y la banda transportadora inferior y v_{r2} es la velocidad relativa entre el cilindro y la banda transportadora superior.

$$F_f(\dot{x}) = \sum_i F_i(\dot{x}) \text{sgn}(v_{ri}(\dot{x})) \quad (7.4)$$

$$v_{ri}(\dot{x}) = v_i - \dot{x} \quad (7.5)$$

$$F_i(\dot{x}) = N_i U_i(\dot{x}) \quad (7.6)$$

$$U_i(\dot{x}) = \frac{\mu_{si} - \mu_{ki}}{1 + p_i |v_{ri}(\dot{x})|} + \mu_{ki} \quad (7.7)$$

Al igual que en el sistema analizado en el capítulo 6, existen diferentes campos vectoriales dependiendo de si el cilindro se desliza por una sola banda

transportadora, por las dos o por ninguna y si las velocidades relativas entre el cilindro y las bandas son positivas o negativas.

Puesto que [18] estudió las bifurcaciones causadas por la variación de las velocidades de las bandas transportadoras, en este caso se dejarán fijas en $v_1 = 0.5 \text{ m/s}$ y $v_2 = -0.7 \text{ m/s}$. Con estas velocidades se obtiene un espacio de estados dividido en ocho regiones.

Tomando el vector de estado $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ con $x_1 = x$ y $x_2 = dx/d\tau$, el sistema está definido por el conjunto de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_j(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} en cada región Z_j según la ecuación (7.8), con g_j como en las ecuaciones (7.9)-(7.16).

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\zeta x_2 + \frac{f(x_1, \omega x_2)}{k} + \frac{g_j(\omega x_2)}{k} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$g_1(y) = 0 \quad (7.9)$$

$$g_2(y) = -F_1(y) + F_2(y) \quad (7.10)$$

$$g_3(y) = F_1(y) + F_2(y) \quad (7.11)$$

$$g_4(y) = -F_1(y) - F_2(y) \quad (7.12)$$

$$g_5(y) = F_1(y) \quad (7.13)$$

$$g_6(y) = -F_1(y) \quad (7.14)$$

$$g_7(y) = -F_2(y) \quad (7.15)$$

$$g_8(y) = F_2(y) \quad (7.16)$$

El campo f_1 corresponde al caso en el que el cilindro no está en contacto con ninguna de las bandas transportadoras, los campos $f_2 - f_4$ a los casos en el que está en contacto con las dos bandas, en los campos f_5 y f_6 el cilindro solo está en contacto con la banda inferior y en los campos f_7 y f_8 solo con la banda superior. De acuerdo a esto las ocho regiones para el sistema son las siguientes:

$$Z_1 = \{x \in \mathbb{R}^2: (x_1 > \delta_1 \wedge x_1 > \delta_3) \vee (x_1 > \delta_2 \wedge x_1 > \delta_4)\} \quad (7.17)$$

$$Z_2 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_2 < x_1 < \delta_1) \wedge (\delta_4 < x_1 < \delta_3) \wedge v_{r1} > 0 \wedge v_{r2} < 0\} \quad (7.18)$$

$$Z_3 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_2 < x_1 < \delta_1) \wedge (\delta_4 < x_1 < \delta_3) \wedge v_{r1} > 0 \wedge v_{r2} > 0\} \quad (7.19)$$

$$Z_4 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_2 < x_1 < \delta_1) \wedge (\delta_4 < x_1 < \delta_3) \wedge v_{r1} < 0 \wedge v_{r2} < 0\} \quad (7.20)$$

$$Z_5 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_2 < x_1 < \delta_1) \wedge v_{r1} > 0\} \quad (7.21)$$

$$Z_6 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_2 < x_1 < \delta_1) \wedge v_{r1} < 0\} \quad (7.22)$$

$$Z_7 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_4 < x_1 < \delta_3) \wedge v_{r2} < 0\} \quad (7.23)$$

$$Z_8 = \{x \in \mathbb{R}^2: (\delta_4 < x_1 < \delta_3) \wedge v_{r2} > 0\} \quad (7.24)$$

Fijando la posición de las bandas en $\delta_1 = 0.65 \text{ m}$, $\delta_2 = -0.20 \text{ m}$, $\delta_3 = 0.29 \text{ m}$ y $\delta_4 = -0.59 \text{ m}$, se obtiene la configuración de regiones de la Figura 7.2(a). En la Figura 7.2(b) se muestran los campos vectoriales para $A = 1.0$.

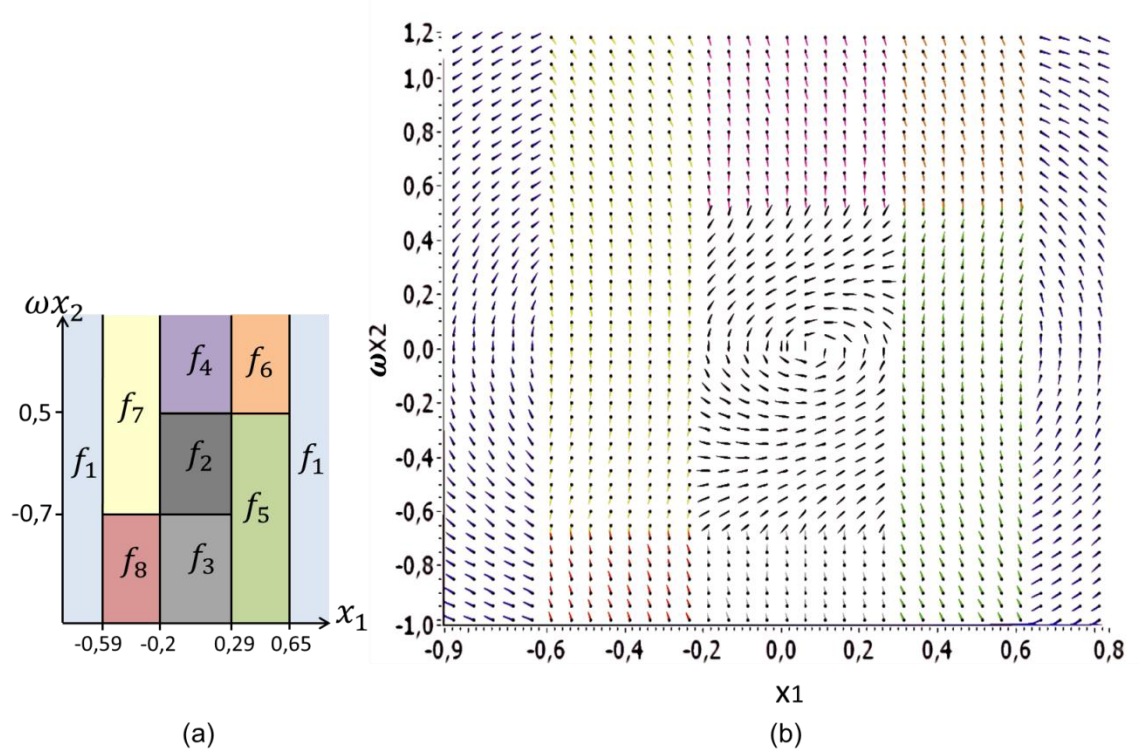


Figura 7.2. (a) Campos vectoriales para $A = 1.0$

Inicialmente, la masa es liberada sin bandas transportadoras desde el punto (1,1) fijando el valor de A en cero. El sistema muestra un comportamiento oscilatorio alcanzando finalmente el punto de equilibrio estable (0,0). La secuencia para la trayectoria C_1 se presenta en la ecuación (7.25).

$$C_1 = \{\Phi_1\}^A / \{0.0/\mathcal{O}\} \quad (7.25)$$

A continuación, las bandas transportadoras se incorporan al sistema y la fuerza de contacto normal se fija en 5N, manteniendo el valor de A en cero. La masa es liberada desde el punto (0.001,0.001) y la evolución del sistema cambia de un punto de equilibrio a un ciclo límite en la región Z_2 . La secuencia para la trayectoria C_2 se presenta en la ecuación (7.26).

$$C_2 = \Phi_2 / \mathcal{O} \quad (7.26)$$

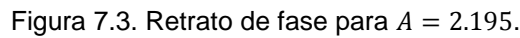
Para valores de A menores a 0.54 la evolución del sistema termina en un ciclo formado por los segmentos Φ_1 y Φ_5 . En $A = 0.54$ el ciclo choca con el punto final del segmento deslizante $\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}$ presentándose la primera bifurcación grazing. La secuencia del ciclo grazing sC_3 se muestra en la ecuación (7.27). Para valores mayores a 0.54 el ciclo incluye segmentos deslizantes.

$${}^sC_3 = \Phi_1 / \Omega_{C_{1,5}} / \Phi_5 / \Omega_{S_{5,6}}^{(+)} / \mathcal{O} \quad (7.27)$$

En un sistema de Filippov simple con dos campos vectoriales y un solo límite de discontinuidad, después de que se presenta una bifurcación grazing, la porción del segmento deslizante por el cual evoluciona el ciclo aumenta hasta alcanzar el punto inicial del segmento $\Omega_S^{(-)}$. En este caso, a causa de la existencia de múltiples campos vectoriales y límites de discontinuidad, la órbita alcanza el primer punto del segmento deslizante $\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}$ presentándose una bifurcación switching, pero al aumentar aún más el valor de A , la trayectoria entra en el segmento deslizante adyacente $\Phi_{S_{2,4}}^{\rightarrow}$ hasta alcanzar su punto final $\Omega_{S_{2,4}}^{(+)}$, el cual coincide con el punto inicial $\Omega_{S_{5,6}}^{(-)}$, entrando nuevamente al segmento $\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}$. Se presenta entonces una nueva bifurcación que ha sido llamada *long switching* en [19].

En $A = 2.195$, como se muestra en la Figura 7.3, la masa recorre las bandas transportadoras de un lado a otro y regresa. De esta forma, la órbita evoluciona a través de todos los campos vectoriales formando un ciclo con 4 segmentos deslizantes. Se presentan dos bifurcaciones long switching, una sobre los segmentos $\Phi_{S_{2,4}}^{\rightarrow}$ y $\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}$, y la otra sobre $\Phi_{S_{3,2}}^{\rightarrow}$ y $\Phi_{S_{7,8}}^{\rightarrow}$. El ciclo sC_4 tiene la secuencia de la ecuación (7.28).

(7.28)


$${}^s\mathcal{C}_5 = \Phi_4/\Omega_{S_{2,4}}^{(\sim)}/\Phi_{S_{2,4}}^{\rightarrow}/\Omega_{S_{2,4}}^{(+)}\Omega_{S_{5,6}}^{(-)}/\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}/\Omega_{S_{5,6}}^{(+)}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,5}}/\Phi_5/\Omega_{S_{2,3}}^{(-)}/\Phi_{S_{2,3}}^{\leftarrow}/\Omega_{S_{2,3}}^{(+)}\Omega_{S_{7,8}}^{(-)}/\Phi_{S_{7,8}}^{\leftarrow}/\Omega_{S_{7,8}}^{(+)}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,7}}/\Phi_7/\Omega_{C_{7,4}}/\mathcal{C} \quad (7.29)$$

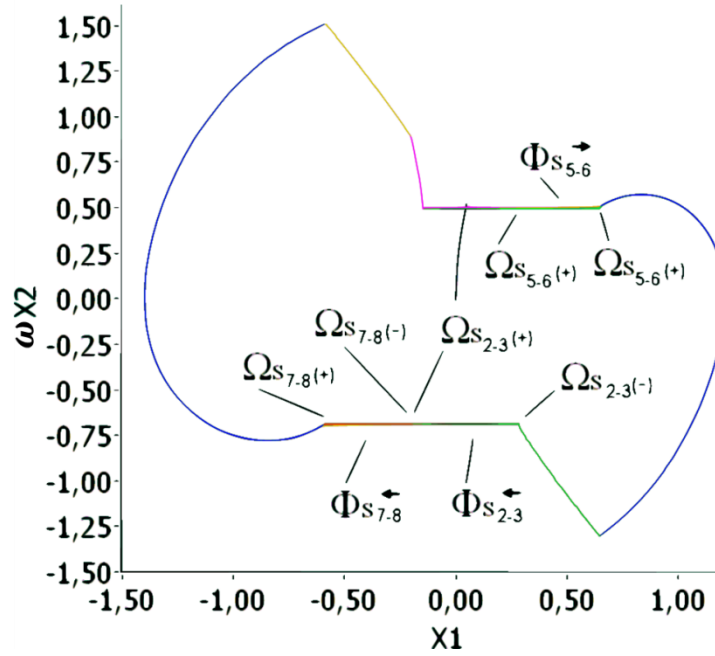


Figura 7.4. Retrato de fase para $A = 2.5$.

El ciclo anterior muestra una serie de características mecánicas especiales. El recorrido completo por la banda transportadora inferior de derecha a izquierda se efectúa a velocidad constante, a pesar de la variación de la fuerza del resorte y de la fuerza externa.

Incrementando el valor de A a 5.5 (Figura 7.5) el segmento que evoluciona por la región Z_4 alcanza el punto final $\Omega_{S_{2,4}}^{(+)}$ del segmento deslizante $\Phi_{S_{2,4}}^{\rightarrow}$ y al mismo tiempo choca con el punto inicial $\Omega_{S_{5,6}}^{(-)}$ del segmento deslizante $\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}$ dando lugar a una bifurcación crossing en el límite de discontinuidad $\Sigma_{2,4}$ y a una bifurcación switching en el límite de discontinuidad $\Sigma_{5,6}$. Además se presenta una bifurcación local *long switching* en el límite de discontinuidad $\Sigma_{7,8}$. El ciclo sC_6 para este valor del parámetro se codifica en la ecuación (7.30).

$${}^sC_6 = \Phi_4 / \Omega_{S_{2,4}}^{(+)} / \Omega_{S_{5,6}}^{(-)} / \Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow} / \Omega_{S_{5,6}}^{(+)} / \Phi_1 / \Omega_{C_{1,5}} / \Phi_5 / \Omega_{C_{5,3}} / \Phi_3 / \Omega_{S_{2,3}}^{(-)} / \Phi_{S_{2,3}}^{\leftarrow} / \Omega_{S_{2,3}}^{(+)} / \Omega_{S_{7,8}}^{(-)} / \Phi_{S_{7,8}}^{\leftarrow} / \Omega_{S_{7,8}}^{(+)} / \Phi_1 / \Omega_{C_{1,7}} / \Phi_7 / \Omega_{C_{7,4}} / \mathcal{C} \quad (7.30)$$

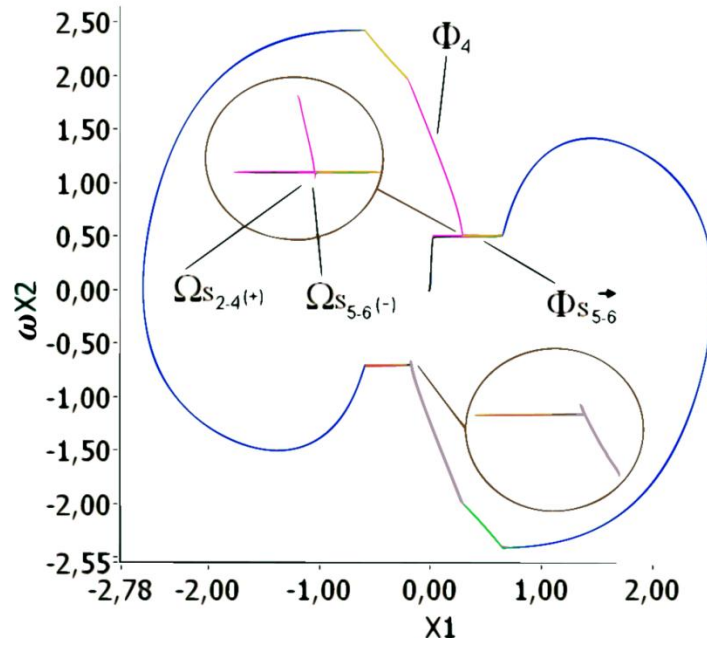


Figura 7.5. Retrato de fase para $A = 5.5$.

En $A = 5.71$, el segmento que evoluciona por la región Z_3 alcanza el punto final $\Omega_{S_{2,3}}^{(+)}$ del segmento deslizante $\Phi_{S_{2,3}}^{\leftarrow}$ y el punto inicial $\Omega_{S_{7,8}}^{(-)}$ del segmento deslizante $\Phi_{S_{7,8}}^{\leftarrow}$ dando lugar nuevamente a una bifurcación doble, una bifurcación crossing en el límite de discontinuidad $\Sigma_{2,3}$ y una bifurcación switching en el límite de discontinuidad $\Sigma_{7,8}$. La secuencia para el ciclo sC_7 se codifica en la ecuación (7.31) y se muestra en la Figura 7.6.

$${}^sC_7 = \Phi_6 / \Omega_{S_{5,6}}^{(\sim)} / \Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow} / \Omega_{S_{5,6}}^{(+)} / \Phi_1 / \Omega_{C_{1,5}} / \Phi_5 / \Omega_{C_{5,3}} / \Phi_3 / \Omega_{S_{2,3}}^{(+)} / \Omega_{S_{7,8}}^{(-)} / \Phi_{S_{7,8}}^{\leftarrow} / \Omega_{S_{7,8}}^{(+)} / \Phi_1 / \Omega_{C_{1,7}} / \Phi_7 / \Omega_{C_{7,4}} / \Phi_4 / \Omega_{C_{4,6}} / C \quad (7.31)$$

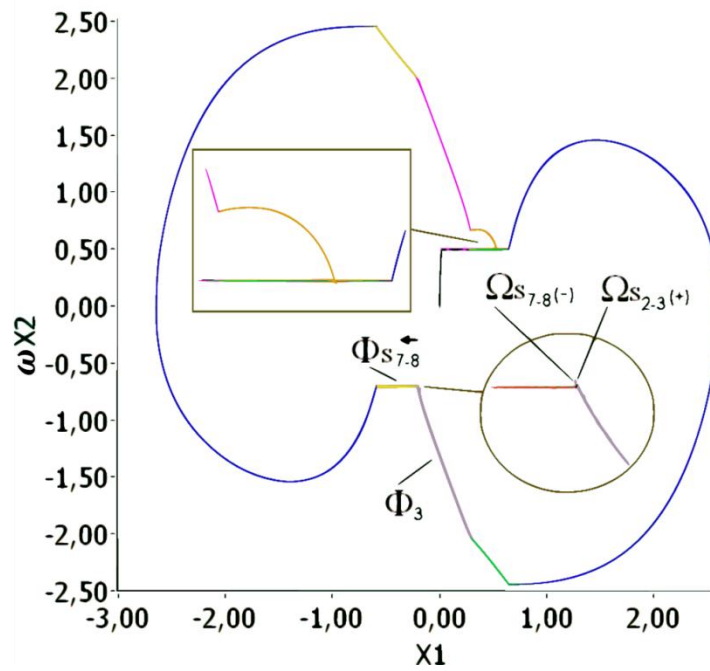


Figura 7.6. Retrato de fase para $A = 5.71$.

Para valores de A mayores a 5.71, el fenómeno *long switching* en el límite de discontinuidad $\Sigma_{7,8}$ desaparece, dando lugar a un ciclo con solo dos segmentos deslizantes. Cuando $A = 5.815$ (Figura 7.7), el segmento que evoluciona por la región Z_6 alcanza el punto final $\Omega_{S_{5,6}}^{(+)}$ del segmento deslizante $\Phi_{S_{5,6}}^{\rightarrow}$ generando una bifurcación crossing. Ahora el ciclo sC_8 solo posee un segmento deslizante $\Phi_{S_{7,8}}^{\leftarrow}$ como se muestra en la ecuación (7.32).

$${}^sC_8 = \Phi_6 / \Omega_{S_{5,6}}^{(+)} / \Phi_1 / \Omega_{C_{1,5}} / \Phi_5 / \Omega_{C_{5,3}} / \Phi_3 / \Omega_{C_{3,8}} / \Phi_8 / \Omega_{S_{7,8}}^{(\sim)} / \Phi_{S_{7,8}}^{\leftarrow} / \Omega_{S_{7,8}}^{(+)} / \Phi_1 / \Omega_{C_{1,7}} / \Phi_7 / \Omega_{C_{7,4}} / \Phi_4 / \Omega_{C_{4,6}} / C \quad (7.32)$$

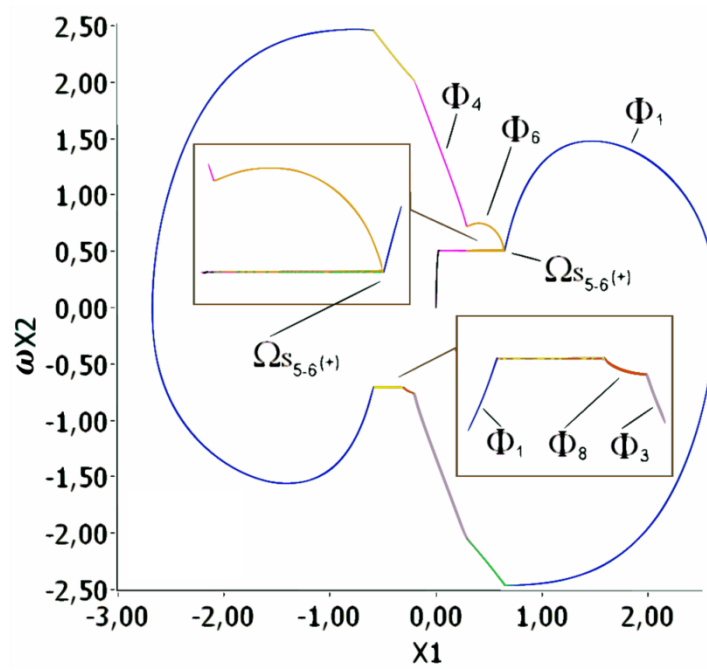


Figura 7.7. Retrato de fase para $A = 5.815$.

En $A = 5.945$, la órbita que evoluciona por la región Z_8 alcanza el punto final $\Omega_{S_{7,8}}^{(+)}$ del segmento deslizante $\Phi_{S_{7,8}}^{\rightarrow}$ generando una bifurcación crossing. La secuencia del ciclo sC_9 se presenta en la ecuación (7.33) y su retrato de fase en la Figura 7.8.

$${}^sC_9 = \Phi_1/\Omega_{C_{1,5}}/\Phi_5/\Omega_{C_{5,3}}/\Phi_3/\Omega_{C_{3,8}}/\Phi_8/\Omega_{S_{7,8}}^{(+)}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,7}}/\Phi_7/\Omega_{C_{7,4}}/\Phi_4/\Omega_{C_{4,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,1}}/\mathcal{C} \quad (7.33)$$

Finalmente, para valores de A mayores a 5.945 ya no existen segmentos deslizantes. La trayectoria es un ciclo que atraviesa por todas las regiones, este ciclo C_{10} se representa mediante la ecuación (7.34). Al igual que en el caso $A = 2.195$, la masa recorre las bandas transportadoras de un lado a otro y regresa, pero esta vez con velocidad variable durante todo el trayecto.

$$C_{10} = \Phi_1/\Omega_{C_{1,5}}/\Phi_5/\Omega_{C_{5,3}}/\Phi_3/\Omega_{C_{3,8}}/\Phi_8/\Omega_{C_{8,1}}/\Phi_1/\Omega_{C_{1,7}}/\Phi_7/\Omega_{C_{7,4}}/\Phi_4/\Omega_{C_{4,6}}/\Phi_6/\Omega_{C_{6,1}}/\mathcal{C} \quad (7.34)$$

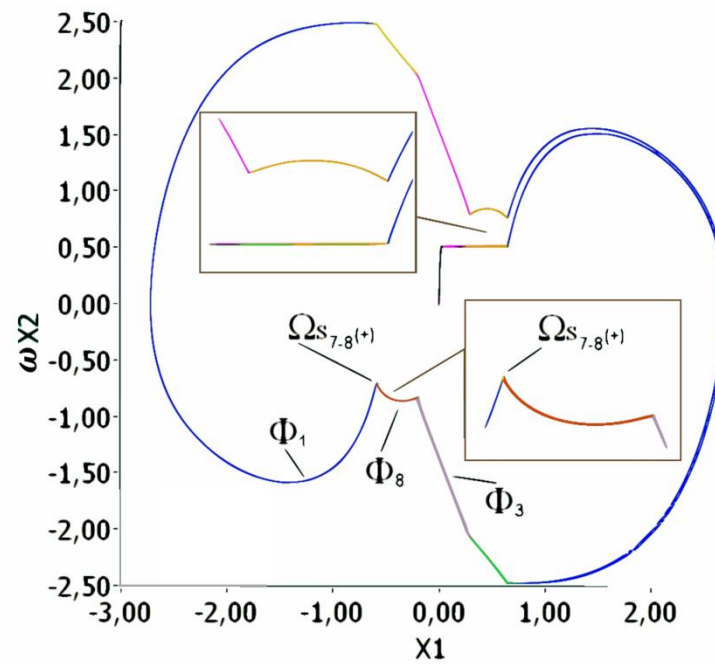


Figura 7.8. Retrato de fase para $A = 5.945$.

El análisis del oscilador de doble banda demostró la capacidad del método SPT para detectar bifurcaciones globales compuestas por hasta cuatro segmentos deslizantes. El estudio mostró dinámicas muy complejas y permitió identificar nuevas dinámicas y eventos en los cuales se presentan simultáneamente dos bifurcaciones deslizantes.

8 MESA MOVIDA POR LEVA

En este capítulo se analizará mediante el método SPT un sistema que incluye varios tipos de discontinuidades: discontinuidades en los campos vectoriales y en las variables de estado. La existencia de múltiples tipos de discontinuidades, hace más difícil el análisis del sistema y le agrega riqueza a la dinámica.

El sistema consiste en un bloque de masa m y largo L_1 que descansa sobre una mesa. La mesa es movida horizontalmente en ambas direcciones por una leva mecánica que rota con velocidad angular ω y excentricidad e . La mesa ejerce fuerza de fricción sobre el bloque causada por el peso N de éste. La posición del bloque en la mesa se denotará por x y la distancia recorrida por la mesa por x_t . En el lado derecho, la mesa está restringida por un resorte con coeficiente de restitución k y un amortiguador con coeficiente c . En el lado izquierdo, la mesa tiene una barrera no elástica. La configuración del sistema se muestra en la Figura 8.1.

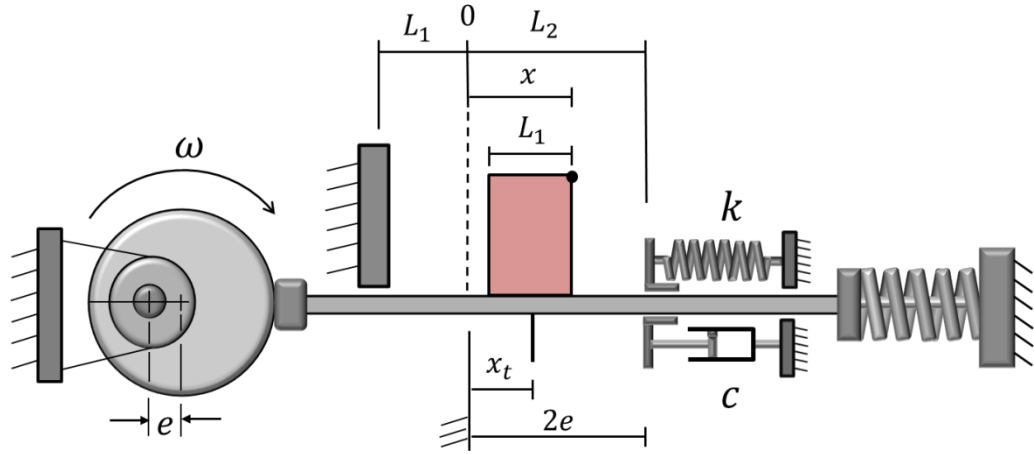


Figura 8.1. Bloque sobre una mesa movida por una leva

El espacio de estados para este sistema se divide en un conjunto de regiones Z_i que se explicarán más adelante. Tomando el vector de estado $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ con $x_1 = x$ y $x_2 = dx/dt$, el sistema se representará por el conjunto de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} en cada región Z_i .

Cuando el bloque no está en contacto con la barrera izquierda y el resorte y el amortiguador no ejercen fuerzas sobre éste, el sistema se describe mediante la ecuación (8.1), donde F_f es la fuerza de fricción entre la mesa y el bloque.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_f \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (8.1)$$

La fuerza de fricción $F_f(\dot{x})$ se describe según la ley de fricción de Conti [17] como en las ecuaciones (8.2) y (8.3), donde $v_r(\dot{x}) = \dot{x}_t - \dot{x}$ es la velocidad relativa entre la mesa y el bloque.

$$F_f(\dot{x}) = F \operatorname{sgn}(v_r(\dot{x})) \quad (8.2)$$

$$F(\dot{x}) = N \left(\frac{\mu_{si} - \mu_{ki}}{1 + p_i |\dot{x}_t - \dot{x}|} + \mu_{ki} \right) \quad (8.3)$$

En la ecuación (8.2) se observa que la fuerza de fricción F_f es diferente para velocidad relativa positiva y velocidad relativa negativa y por tanto se generan dos regiones con campos vectoriales diferentes, Z_1 y Z_2 , con f_1 y f_2 como en las ecuaciones (8.4) y (8.5).

$$f_1(x) = \left(\frac{x_2}{m} \right) \quad (8.4)$$

$$f_2(x) = \left(-\frac{x_2}{m} \right) \quad (8.5)$$

El límite de discontinuidad $\Sigma_{1,2}$ entre las regiones Z_1 y Z_2 es del tipo Filippov, ya que su campo vectorial es discontinuo. En esta frontera, a diferencia de lo que ocurre en las regiones Z_1 y Z_2 , el bloque se mueve con la misma velocidad de la mesa a causa de la fuerza de fricción que no permite que éste se deslice. Las regiones Z_1 y Z_2 están determinadas por las ecuaciones (8.6) y (8.7).

$$Z_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \wedge (x_1 < L_2 \vee k(x_1 - L_2) + cx_2 < 0) \wedge v_r > 0 \} \quad (8.6)$$

$$Z_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \wedge (x_1 < L_2 \vee k(x_1 - L_2) + cx_2 < 0) \wedge v_r < 0 \} \quad (8.7)$$

Cuando el resorte y el amortiguador ejercen fuerzas sobre el bloque, el sistema se describe mediante la ecuación (8.8).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k(x - L_2) = F_f \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (8.8)$$

Nuevamente, se generan dos campos vectoriales diferentes Z_3 y Z_4 para los valores positivos y negativos de la velocidad relativa, con f_3 y f_4 como en las ecuaciones (8.9) y (8.10).

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}(x_1 - L_2) - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F(x_2)}{m} \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

$$f_4(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}(x_1 - L_2) - \frac{c}{m}x_2 - \frac{F(x_2)}{m} \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

Al igual que la frontera $\Sigma_{1,2}$, el límite de discontinuidad $\Sigma_{3,4}$ entre las regiones Z_3 y Z_4 es del tipo Filippov. El bloque se mueve con la misma velocidad de la mesa sobre esta frontera. Las regiones Z_3 y Z_4 están determinadas por las ecuaciones (8.11) y (8.12).

$$Z_3 = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 > 0 \wedge x_1 > L_2 \wedge k(x_1 - L_2) + cx_2 > 0 \wedge v_r > 0\} \quad (8.11)$$

$$Z_4 = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 > 0 \wedge x_1 > L_2 \wedge k(x_1 - L_2) + cx_2 > 0 \wedge v_r < 0\} \quad (8.12)$$

Finalmente, existe una región adicional Z_5 , la cual se encuentra detrás de la barrera no elástica y es inaccesible. Por lo cual, su campo vectorial no está definido. Esta región está representada mediante la ecuación (8.13).

$$Z_5 = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 < 0\} \quad (8.13)$$

Cuando el bloque se encuentra en cualquiera de las regiones Z_1 o Z_2 y choca con la barrera no elástica en el lado izquierdo alcanzando el límite de discontinuidad $\Sigma_{1,5}$ o $\Sigma_{2,5}$, el bloque cambia de dirección y se presenta un salto en su velocidad. Por consiguiente, los límites de discontinuidad $\Sigma_{1,5}$ y $\Sigma_{2,5}$ tienen discontinuidad de salto.

La leva tiene un movimiento dividido en tres fases: primero avanza con movimiento armónico según las ecuaciones (8.14) - (8.16), luego permanece en reposo y finalmente se devuelve. El perfil de la mesa se muestra en la Figura 8.2.

$$x_t = e(1 - \cos(\omega t)) \quad (8.14)$$

$$\dot{x}_t = \omega e \sin(\omega t) \quad (8.15)$$

$$\ddot{x}_t = \omega^2 e \cos(\omega t) \quad (8.16)$$

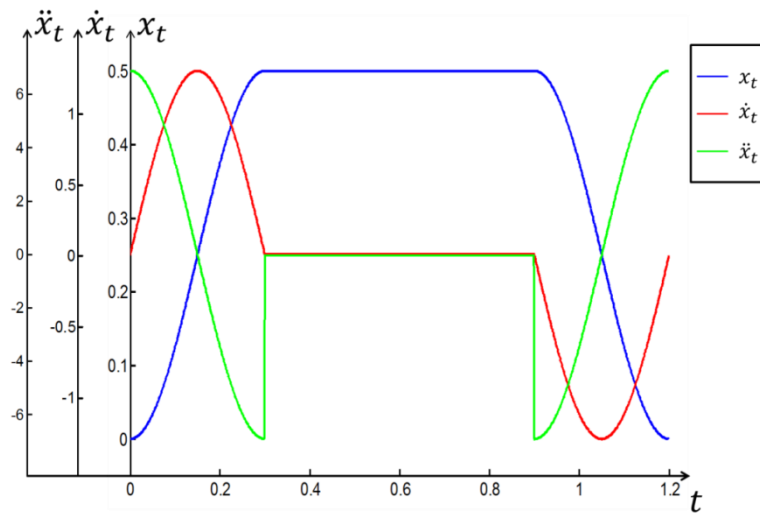


Figura 8.2. Perfil de la leva

En la Figura 8.3 se muestra el retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 50$, $e = 0.10$ y posición inicial $x_0 = 0.05$. El movimiento libre del bloque a la misma velocidad de la mesa, se representa en azul y cuando hay velocidad relativa $v_r \neq 0$ en magenta. El movimiento restringido por el resorte a la misma velocidad de la mesa se representa en verde y con $v_r \neq 0$, en naranja. En este caso, debido a la baja excentricidad y velocidad de la leva, el bloque no toca el resorte ni la barrera y se desplaza siempre a velocidad relativa cero.

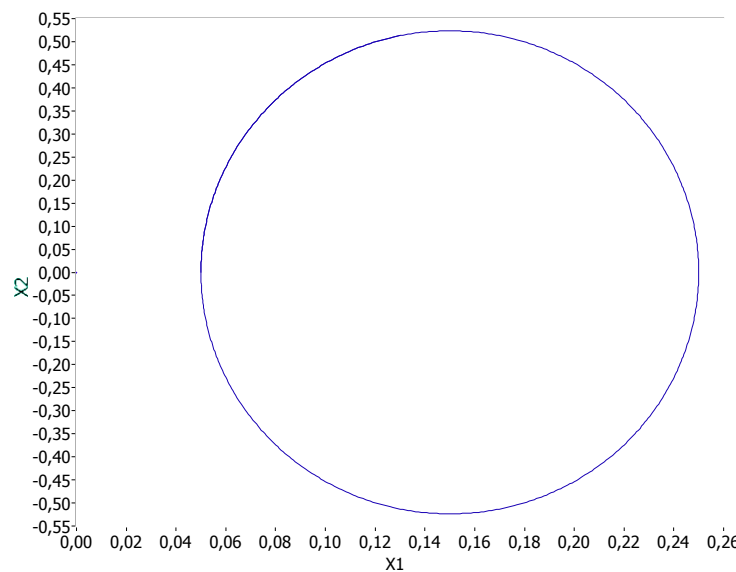


Figura 8.3. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 50$, $e = 0.10$, $x_0 = 0.05$

Al aumentar las RPM de la leva a 100 (Figura 8.4), aumenta la velocidad relativa entre la mesa y el bloque y disminuye la fuerza de fricción dinámica mientras que aumenta la aceleración, por lo cual en los valores de máxima aceleración se presenta movimiento con velocidad relativa $v_r \neq 0$, es decir, deslizamiento entre el bloque y la mesa.

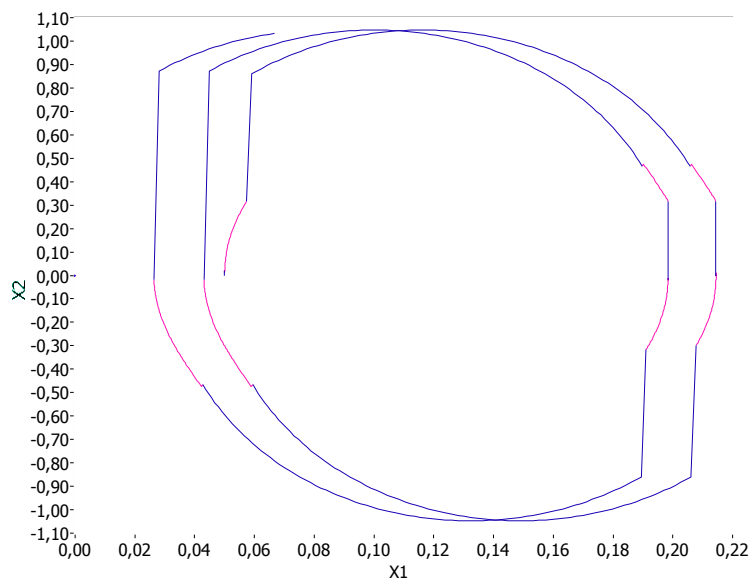


Figura 8.4. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 100$, $e = 0.10$, $x_0 = 0.05$

Con $RPM = 50$ y al aumentar la excentricidad a $e = 0.24$ (Figura 8.5), el bloque hace contacto con el resorte y el amortiguador lo cual hace disminuir la velocidad del bloque y se produce deslizamiento entre el bloque y la mesa. Cuando la leva se devuelve, el bloque cambia de dirección. La masa choca la barrera no elástica cuando la leva se mueve en dirección negativa, por lo que el bloque choca varias veces con la barrera hasta que la leva comienza a moverse en dirección positiva.

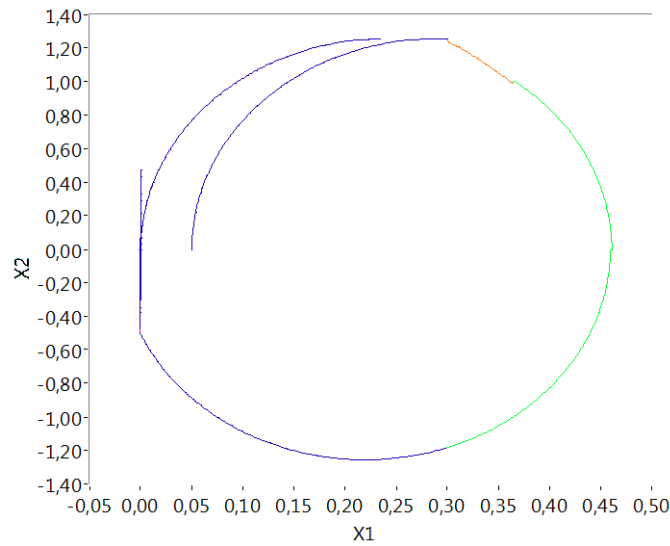


Figura 8.5. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 50$, $e = 0.24$, $x_0 = 0.05$

Cuando las RPM de la leva disminuyen a 20 (Figura 8.6), la fuerza del amortiguador sobre el bloque (proporcional a la velocidad del bloque) es menor y por tanto los cambios en la velocidad no se presentan inmediatamente el bloque hace contacto con el resorte-amortiguador sino cuando la compresión del resorte es mayor. Cuando la leva se detiene, la fuerza del resorte empuja el bloque hacia la izquierda mientras su velocidad oscila alrededor de cero. En este caso el bloque no golpea la barrera no elástica.

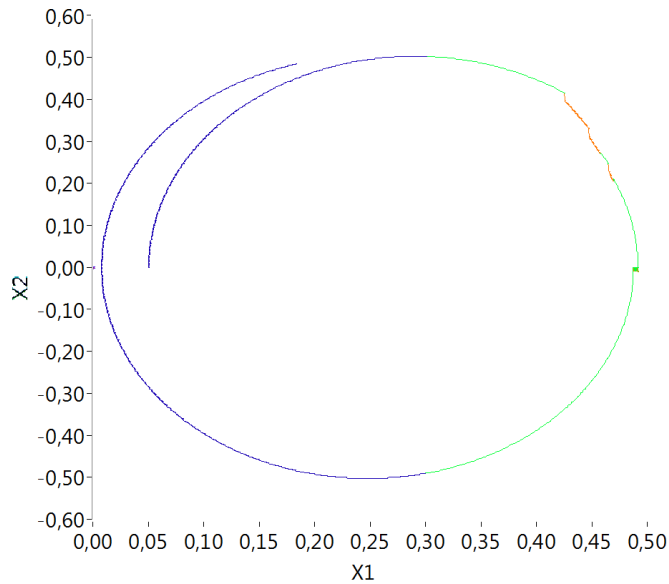


Figura 8.6. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 20$, $e = 0.24$, $x_0 = 0.05$

Finalmente, al aumentar las RPM a 80 (Figura 8.7) se presenta deslizamiento entre el bloque y la mesa en los valores altos de aceleración cuando el bloque no está en contacto con ninguna de las restricciones. La fuerza del resorte y la fuerza del amortiguador la cual es de gran magnitud debido a la alta velocidad del bloque, compensan la fuerza de inercia, por lo cual, mientras el bloque está en contacto con el resorte-amortiguador, solo se presenta deslizamiento cuando éste avanza en dirección negativa o cuando su velocidad es muy pequeña. Finalmente, el bloque impacta con la barrera cuando la mesa se mueve en dirección positiva por lo cual rebota sin volver a chocar con ella.

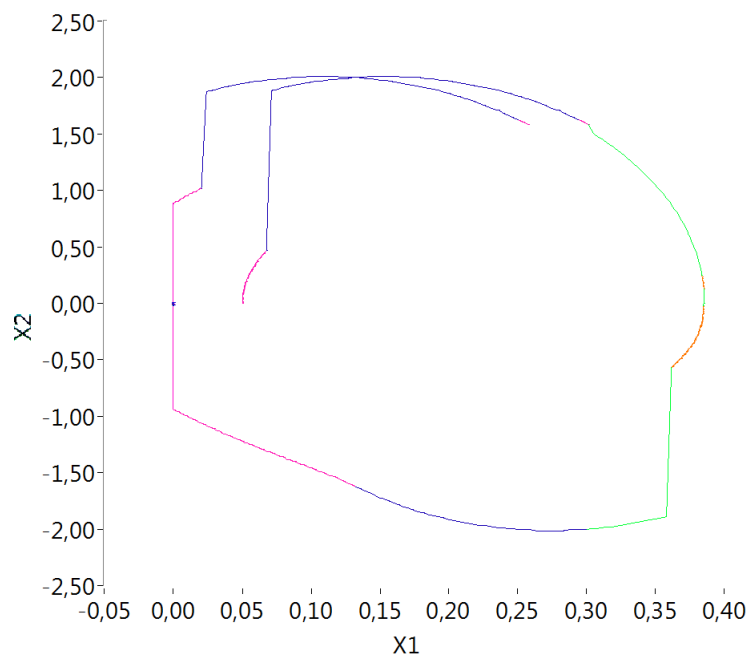


Figura 8.7. Retrato de fase para $k = 50$, $c = 10$, $RPM = 80$, $e = 0.24$, $x_0 = 0.05$

Como se pudo observar, las dinámicas del sistema son bastante complejas, presentando múltiples segmentos deslizantes tanto en el movimiento libre como en el movimiento restringido por el resorte y el amortiguador y dando lugar a continuos cambios entre un modo de funcionamiento y otro. La presencia de una barrera no elástica da lugar a diferentes dinámicas que dependen de la velocidad de la mesa cuando el bloque choca con la barrera. El análisis demostró la capacidad del método SPT para analizar sistemas con varios tipos de discontinuidades.

9 CONCLUSIONES

El análisis de un grupo de varios sistemas no suaves o discontinuos de diferentes campos de la ciencia y la ingeniería utilizando el método SPT (Singular Point Tracking) ha sido presentado. El método SPT está basado en la identificación y seguimiento de algunos puntos con características especiales sobre los conjuntos de discontinuidad.

La ampliación del método SPT mediante la caracterización de los puntos sobre las regiones suaves para identificar los tipos de puntos de equilibrio y la dirección de giro de los puntos regulares, llevó a la extensión de la clasificación de 45 a 53 puntos, la cual facilita el análisis integral de los sistemas discontinuos y ayuda a comprender las dinámicas tanto en las regiones no suaves como en las suaves.

Se presentó una síntesis de sistemas mecánicos, eléctricos, ecológicos, químicos y sociales que han sido estudiados anteriormente y que pueden ser modelados como sistemas no suaves o discontinuos. Esta síntesis ayudó a valorar la gran variedad de sistemas no suaves presentes en los diferentes campos de la ciencia y la ingeniería.

El sistema depredador presa propuesto en [1] fue ampliado para ilustrar el método SPT en la detección de bifurcaciones locales y globales de sistemas no suaves. Se demostró el cambio en las secuencias de segmentos regulares y puntos especiales en el límite de discontinuidad cuando se presenta una bifurcación local y en las secuencias de segmentos y puntos aislados en las regiones suaves y en los límites de discontinuidad pertenecientes a órbitas periódicas cuando se presenta una bifurcación global.

Un oscilador rotativo con múltiples límites de discontinuidad debido a la forma de las levas y el contacto friccional fue utilizado para ilustrar el procedimiento de detección de bifurcaciones globales. El método SPT brindó una primera aproximación para determinar los valores de los parámetros en los cuales se presentan bifurcaciones y permitió detectar los puntos iniciales de los ciclos, los cambios de las secuencias de ciclos y las bifurcaciones grazing, switching y crossing, resultando en una metodología útil para analizar sistemas no suaves complejos que presentan dinámicas deslizantes.

El análisis de un oscilador de doble banda con múltiples límites de discontinuidad demostró la capacidad del método SPT para detectar bifurcaciones globales de ciclos compuestos por hasta cuatro segmentos deslizantes. El estudio permitió identificar nuevas dinámicas y eventos en los cuales se presentan simultáneamente dos bifurcaciones deslizantes.

Finalmente, el método SPT fue utilizado para analizar las dinámicas de un sistema compuesto por un bloque sobre una banda transportadora con fricción que además está sujeto a impacto y a una restricción del tipo resorte-amortiguador. El análisis permitió demostrar la capacidad del método para analizar sistemas con varios tipos de discontinuidades.

El análisis de los diferentes sistemas no suaves mediante el método SPT permitió entender la gran complejidad dinámica de sistemas relativamente simples, los cuales presentan gran variedad de campos vectoriales y límites de discontinuidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. Kuznetsov YA, Rinaldi S, Gragnani A. One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2003; 13(8): p. 2157-2188.
2. Leine RI. Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type.: Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven; 2000.
3. Di Bernardo M, Budd C, Champneys AR, Kowalczyk P, Nordmark A, Olivar G, et al. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. *SIAM Rev*. 2006; 50(4): p. 629-701.
4. Kowalczyk P, Di Bernardo M, Champneys AR, Hogan SJ, Homer M, Piiroinen PT, et al. Two-Parameter Discontinuity-Induced Bifurcations of Limit Cycles: Classification and Open Problems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2006; 16(3): p. 601-629.
5. Filippov AF. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides* Dortrecht: Kluwer Academic Publishers; 1988.
6. Arango I. Singular Point Tracking: a method for analysis of Sliding Bifurcations in Nonsmooth Systems: Ph.D. thesis, National University of Colombia; 2011.
7. Savi MA, Divenyi S, Penna Franca LF, Weber HI. Numerical and experimental investigations of the nonlinear dynamics and chaos in non-smooth systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2007; 301: p. 59-73.
8. Tjahjowidodo T, Al-Bender F, Van Brussel H. Quantifying Chaotic Responses of Mechanical Systems with Backlash Component. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2007; 21(2): p. 973-993.
9. Galvanetto U. Sliding Bifurcation in the Dynamics of Mechanical Systems with Dry Friction-remarks for engineers and applied scientists. *Journal of Sound and Vibration*. 2004; 276: p. 121-139.
10. di Bernardo M, Budd CJ, Champneys AR, Kowalczyk P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications: Applied Mathematical Sciences 163*, Springer-Verlag ; 2008.
11. Méndez Serrano J. Corrector de factor de potencia reductor-elevador monofásico : Tesis de Licenciatura, Universidad de las Américas Puebla.;

2004.

12. Fernández Samacá L. Caracterización de bifurcaciones en un circuito electrónico conmutado: Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia; 2007.
13. Ocampo Martinez CA. Control de un conversor de potencia con modulador de ancho de pulso centrado usando modos deslizantes: Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia; 2003.
14. Dercole F, Gragnani A, Rinaldi S. Bifurcation analysis of piecewise smooth ecological models. *Theoretical Population Biology*. 2007; 72: p. 197-213.
15. Moudgalya KM, Ryali V. A class of discontinuous dynamical systems I. An ideal gas-liquid system. *Chemical Engineering Science*. 2001; 56: p. 3595-3609.
16. Colombo A, Rinaldi S. Chaos in Two-Party Democracies. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008; 18(7): p. 2133-2140.
17. Casini P, Giannini O, Vestroni F. Experimental evidence of non-standard bifurcations in non-smooth oscillator dynamics. *Nonlinear Dynamics*. 2006; 46(3): p. 259-272.
18. Arango I, Taborda JA, Olivar G. Localización de bifurcaciones deslizantes en sistemas con múltiples límites de discontinuidad. *Dyna*. 2011; 167: p. 160-168.
19. Casini P, Vestroni F. Nonstandard Bifurcations in Oscillators with Multiple Discontinuity Boundaries. *Nonlinear Dynamics*. 2004; 35(1): p. 41-59.
20. Arango I, Pineda F, Ruiz O. Comparison of bifurcations and sequences of elements in cycles of nonsmooth systems. *Physics D*. .
21. Di Bernardo M, Pagano DJ, Ponce E. Non-hyperbolic boundary equilibrium bifurcations in planar Filippov Systems: A case study approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008; 18(5): p. 1377-1392.
22. Guardia M, Seara MT, Teixeira MA. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations*. 2011; 250(4): p. 1967-2023.
23. Di Bernardo M, Kowalczyk P, Nordmark A. Bifurcations of Dynamical Systems with Sliding: Derivation of normal-form mappings. *Physica D*. 2002; 170: p.

175-205.

24. Kowalczyk P, Di Bernardo M. Two-Parameter Degenerate Sliding Bifurcations in Filippov Systems. *Physica D*. 2005; 204(3-4): p. 204-229.
25. Jeffrey MR, Hogan SJ. The geometry of generic sliding bifurcations. *SIAM Rev.* 2011; 53: p. 505-525.
26. Hirsch MW, Smale S, Devaney RL. *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*; 2004.